



# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

## “SOBRE LOS PRODUCTOS SIMÉTRICOS DE ESPACIOS EUCLIDIANOS”

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:  
Maestra en Ciencias (Matemáticas)

PRESENTA:  
Mat. Mónica Andrea Reyes Quiroz

TUTORES ACADÉMICOS:  
Dr. Enrique Castañeda Alvarado  
Dr. Fernando Orozco Zitli



TOLUCA, MÉXICO

MARZO 2020



*A mis padres  
con gran aprecio  
y agradecimiento*



# Agradecimientos

A Dios, a la vida, por el privilegio de haber conocido a grandes personas.

A mi asesor de tesis el Dr. Enrique Castañeda Alvarado y coasesor el Dr. Fernando Orozco Zitli, por la orientación y ayuda que me brindaron para la realización de esta tesis, por su apoyo y amistad.

A mis revisores, Dr. Javier Sánchez Martínez, Dr. David Maya Escudero, Dr. Félix Capulín Pérez, Dr. Alejandro Fuentes Montes de Oca y Dr. Alfredo Cano Rodríguez, por sus aportaciones y su gran accesibilidad.

A mi familia, por confiar en mí.

A mis compañeros, por agregar esa chispa de aventura y diversión a mi vida.

A todos mis profesores, que me enseñaron tanto de la profesión como de la vida, impulsandome a seguir adelante.



# Resumen

Dado un espacio métrico  $X$  y un número natural  $n$ , definimos el  $n$  - ésimo producto simétrico de  $X$ ,  $F_n(X)$ , como el conjunto formado por todos los subconjuntos no vacíos de  $X$  con cardinalidad menor o igual que  $n$ , a este conjunto lo dotamos con la métrica de Hausdorff. En este trabajo estudiamos los productos simétricos de espacios euclidianos desde el punto de vista de la Teoría de funciones geométricas y sus encajes bi-Lipschitz en espacios euclidianos.



# Abstract

Given a metric space  $X$  and a natural number  $n$ , we define the  $n^{\text{th}}$  symmetric product of  $X$ ,  $F_n(X)$ , as the set of all nonempty subsets of  $X$  with cardinality at most  $n$ . This set is endowed with the Hausdorff metric. In this work we study the symmetric products of Euclidean spaces from the point of view of Theory of geometric functions and their bi-Lipschitz embeddings into Euclidean spaces.



# Índice general

Lista de figuras	13
Introducción	15
Antecedentes	17
Hipótesis y Objetivos	19
Metodología	21
<b>1. Preliminares</b>	<b>23</b>
1.1. Notación . . . . .	23
1.2. Conceptos básicos . . . . .	23
1.3. Ejemplos clásicos . . . . .	26
1.4. Isometrías en Productos Simétricos . . . . .	37
<b>2. Retracciones Lipschitz</b>	<b>51</b>
2.1. $m$ -odos simples . . . . .	53
2.2. Árboles . . . . .	63
Resultados	75
Discusión	77
Conclusiones	79
Bibliografía	81
Anexos	83



# Índice de figuras

1.1. Ejemplo de gráfica finita. . . . .	24
1.2. Ejemplo de árbol. . . . .	25
1.3. 5-odo simple. . . . .	25
1.4. Representación de $a_\lambda^b$ . . . . .	25
1.5. Representación del punto medio de $\{a, b\}$ . . . . .	26
1.6. Conjunto $P$ . . . . .	27
1.7. Efecto de la función $\mu$ . . . . .	28
1.8. Representación de $p, q, s, \phi, a_{pq}, b_{pq}$ y $L_{pq}$ . . . . .	29
1.9. Comportamiento de la función $\Phi$ en $\{p\}$ . . . . .	30
1.10. Imagen de $\{p, q\}$ cuando $p, q$ están en el eje $x$ y $s = (0, 0)$ . . . . .	30
1.11. Imagen de $\{p, q\}$ cuando $p, q$ están en el eje $x$ . . . . .	31
1.12. Imagen de $\{p, q\}$ cuando $p, q$ están en una recta paralela al eje $x$ . . . . .	31
1.13. Imagen de todos los elementos de la forma $\{p, q\}$ cuando $p, q$ están en cualquier recta paralela al eje $x$ . . . . .	32
1.14. Imagen de todos los elementos de la forma $\{p, q\}$ cuando $p, q$ están en cualquier recta paralela a la recta identidad. . . . .	32
1.15. Imagen de todos los elementos de la forma $\{p, q\}$ cuando $p, q$ están en cualquier recta paralela al eje $y$ . . . . .	33
1.16. Imagen de todos los elementos de la forma $\{p, q\}$ cuando $p, q$ están en cualquier recta paralela a la recta menos identidad. . . . .	33
1.17. Caso de $n = 4$ . . . . .	34
1.18. Algunos elementos de la sucesión $\{p_k\}$ . . . . .	35
1.19. Representación de la sucesión bajo la función $h$ . . . . .	36
1.20. Ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de los puntos $a_{jk}$ . . . . .	41
1.21. Posición 1 . . . . .	42
1.22. Posición 2 . . . . .	42
1.23. Representación en $\mathbb{R}^2$ de $H, L, C$ y los elementos de $A$ . . . . .	43
1.24. Representación en $\mathbb{R}^2$ de $x$ y $x'$ . . . . .	44
1.25. Representación en $\mathbb{R}^2$ de $S_d(x, r), S_d(x', r')$ y $\Phi(A)$ . . . . .	44
1.26. Representación de los elementos de $A$ . . . . .	45
1.27. Representación de $\varepsilon$ y los elementos de $A$ . . . . .	45
1.28. Caso para $F_3(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	48
2.1. Caso particular, $A \in F_{(2)}(X)$ y $B \in F_{(1)}(X)$ . . . . .	52

2.2.	Representación para el triodo simple. . . . .	54
2.3.	Ordenando un conjunto $A$ para el caso de un triodo simple. . . . .	54
2.4.	Ejemplo de cuando los puntos $t_j^i$ están en $T_1$ . . . . .	55
2.5.	Ejemplo de cuando los puntos $t_j^i$ están en $T_2$ . . . . .	55
2.6.	Ejemplo de cuando los puntos $t_j^i$ están en $T_1$ y $T_2$ . . . . .	55
2.7.	Ejemplo de cuando los puntos $t_j^i$ están en $T_1$ , $T_2$ y $T_3$ . . . . .	56
2.8.	$b \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ . . . . .	63
2.9.	$a_\lambda^v \in \overrightarrow{bb_\lambda^v}$ . . . . .	64
2.10.	Condiciones de la proposición. . . . .	64
2.11.	$a_\lambda^v \in \overrightarrow{bv}$ y $b_\lambda^v \in \overrightarrow{av}$ . . . . .	65
2.12.	$d, e \in \overrightarrow{ab}$ . . . . .	67
2.13.	$\overrightarrow{ab} \subset \overrightarrow{ae}$ . . . . .	67
2.14.	$\overrightarrow{ab} \not\subset \overrightarrow{ae}$ . . . . .	67
2.15.	$\overrightarrow{ab} \subset \overrightarrow{de}$ . . . . .	68
2.16.	$\overrightarrow{st} \subset \overrightarrow{ab}$ . . . . .	68
2.17.	$\overrightarrow{st} \not\subset \overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ab} \not\subset \overrightarrow{st}$ . . . . .	69
2.18.	Retracción $r$ . . . . .	70

# Introducción

La topología es una de las ramas más jóvenes de las matemáticas, dedicada, dicho de una manera informal, al estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos o se hagan coincidir puntos diferentes.

Dentro de la topología existe una línea de investigación dedicada a la Teoría de los Hiperespacios. Y dentro de la Teoría de los Hiperespacios existen los llamados productos simétricos, los cuales fueron introducidos por los reconocidos matemáticos K. Borsuk y S. Ulam y han sido estudiados desde diversas ópticas, por ejemplo se han estudiado propiedades topológicas como la conexidad local, arco-conexidad, aposidésis, propiedad del punto fijo, homogeneidad, entre otras; así como también han sido estudiados desde el punto de vista de Teoría de funciones geométricas. Otro hiperespacio que es de alta importancia, que ha sido ampliamente estudiado y tiene múltiples aplicaciones en análisis es el hiperespacio de subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio  $X$ ,  $2^X$ . Los productos simétricos son muy importantes debido a que constituyen una sucesión creciente de subconjuntos de  $2^X$ , por lo que estudiar los productos simétricos nos ayuda a entender  $2^X$ . En el presente proyecto abordaremos los productos simétricos de Espacios Euclidianos.

El Capítulo 1 está dedicado a explicar algunas definiciones básicas, se tiene una sección dedicada a tratar de comprender intuitiva y geoméricamente las ideas de las pruebas de algunos resultados clásicos escritos en [15], por R. Moslki, en los cuales demuestra que  $F_2(I^2)$  es homeomorfo a  $I^4$  y para  $n \geq 3$ ,  $F_n(I^2)$  no es homeomorfo a ningún subconjunto de  $\mathbb{R}^{2n}$  y  $F_2(I^n)$  tampoco. Adicionalmente se abordan las isometrías de los productos simétricos y se demuestra que todas las isometrías definidas en  $F_n(\mathbb{R}^n)$  son inducidas de isometrías en  $\mathbb{R}^n$ .

El Capítulo 2 conforma la parte sustancial de este trabajo y está compuesto por resultados que se obtuvieron como parte del trabajo de investigación que se realizó durante la maestría, en los cuales probamos que  $F_{n-1}(X)$  es un retracto  $(6n + 1)$ -Lipschitz de  $F_n(X)$  para  $X$  un  $m$ -odo simple, y que si  $X$  es un árbol entonces  $F_{n-1}(X)$  es un retracto 4-Lipschitz de  $F_n(X)$  para  $n \leq 3$ .



# Antecedentes

Dentro de la Topología, la Teoría de los Hiperespacios apareció en la década comprendida entre 1910 y 1920 aproximadamente, con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris. Fue en 1931 cuando K. Borsuk y S. Ulam introdujeron los productos simétricos en [5] y desde entonces han sido estudiados por muchos autores véanse por ejemplo [1], [6], [7], [9] y [15].

Cuando K. Borsuk y S. Ulam dieron la noción de los productos simétricos probaron que  $F_n(I)$  es homeomorfo a  $I^n$  para  $n = 1, 2, 3$ ; donde  $I^n$  denota la  $n$ -celda, pero para  $n \geq 4$ ,  $F_n(I)$  no es homeomorfo a algún subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Recientemente en 2010 M. Borovikova, Z. Ibragimov y H. Yousefi probaron en [4] que  $F_4(\mathbb{R})$  se podía encajar en  $\mathbb{R}^5$ , en este trabajo también se interesaron por el estudio de encajes Lipschitz en espacios euclidianos de productos simétricos de la recta real y el estudio de sus isometrías.

Después en 2015 L. V. Kovalev en [12] no sólo se interesa por el estudio de encajes Lipschitz en espacios euclidianos de productos simétricos de la recta real, sino también de productos simétricos de espacios euclidianos, artículo en el cual prueba los siguientes resultados:

**Teorema 0.0.1.**  $F_n(\mathbb{R})$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^m$  mediante un encaje bi-Lipschitz con  $m = 2\lfloor (e - 1)n! \rfloor$ .

**Teorema 0.0.2.**  $F_n(\mathbb{R}^d)$  se puede encajar en  $\mathbb{R}^m$  mediante un encaje bi-Lipschitz con  $m = 2(n + 1)^{d-1}\lfloor (e - 1)n! \rfloor$ .

En este artículo dedica una sección al estudio de retracciones Lipschitz en productos simétricos; además ha escrito otros artículos como [2] junto con M. Bacák y [11], en los cuales estudian retracciones Lipschitz en productos simétricos de espacios de Hadamard y en [13] sobre espacios de Hilbert.

Un poco más tarde, en 2015 N. Chinen en [10], contestando a una pregunta hecha por M. Borovikova y Z. Ibragimov en [3], prueba que cada isometría en  $F_n(X)$  es inducida por una isometría en  $X$ , esto cuando  $X$  es un espacio euclidiano o una esfera con las métricas usuales. Además, también prueba que  $F_2(\mathbb{R}^2)$  es bi-Lipschitz equivalente a  $\mathbb{R}^4$ .



# Hipótesis y Objetivos

En este proyecto estamos interesados en analizar algunas propiedades que tiene el hiperespacio  $F_n(X)$  con  $n$  un número natural y  $X$  un espacio métrico, partiendo de las siguientes hipótesis:

1. Es posible caracterizar los espacios  $X$  para los que  $F_{n-1}(X)$  sea un retracto Lipschitz de  $F_n(X)$ .
2. Las isometrías de  $F_n(X)$  son inducidas por isometrías de  $X$ .

El objetivo general de este trabajo es estudiar los productos simétricos de espacios métricos desde el punto de vista de la Teoría de funciones geométricas y funciones Lipschitz.

De manera mas específica nuestro objetivo es demostrar que  $F_{n-1}(X)$  es un retracto Lipschitz de  $F_n(X)$  cuando  $X$  es un árbol.



# Metodología

El trabajo de investigación se realizará en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMéx), bajo la dirección de los tutores académicos, Dr. Enrique Castañeda Alvarado y Dr. Fernando Orozco Zitli.

La Facultad de Ciencias de la UAEMéx, cuenta con una biblioteca, que contiene una colección de libros especializados en el área en que se va a realizar la investigación. La tesista podrá hacer uso de esta facilidad así como del laboratorio de cómputo, el cual está equipado con computadoras y acceso a la red de internet, así como con paquetería diversa que permite, la preparación automatizada de textos matemáticos ( $\text{\LaTeX}$ ).

Al inicio de las actividades, la tesista llevará dos cursos obligatorios Álgebra Moderna y Análisis Real y Complejo, los cuales son necesarios para su formación matemática. Más adelante cursará Topología I y II, Hiperespacios de Continuos y Temas Selectos de Teoría de Hiperespacios los cuales son fundamentales para complementar la investigación. Así mismo, a lo largo de la maestría, la tesista asistirá y participará en el Seminario Interdisciplinario, donde alumnos del posgrado exponen, discuten y complementan sus temas de investigación. También llevará Actividades de Investigación de Maestría del I al VI, en tales, se desarrollará el material que compondrá la tesis y en donde primero se ocupará de revisar la bibliografía necesaria y leer cuidadosamente algunos artículos bajo la supervisión de los tutores y finalmente en un seminario con ellos se discutirán los resultados obtenidos, para su posible publicación en una revista indizada y escritos detalladamente en la tesis.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Notación

- $\mathbb{N}$  denota el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{R}$  denota el conjunto de los números reales.
- $\mathbb{R}^+$  denota el conjunto de los números reales positivos.
- $I$  denota el intervalo cerrado  $[0, 1]$ .
- Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^n$  denota la esfera de dimensión  $n$ .

Sean  $X$  un espacio con métrica  $d$  y con la topología inducida por su métrica,  $A \subset X$ ,  $a \in X$ ,  $f : X \rightarrow X$  una función y  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ .

- $|A|$  denota la cardinalidad de  $A$ .
- $B_d(a, \varepsilon)$  denota la bola abierta de radio  $\varepsilon$  con centro en  $a$
- $\overline{B_d(a, \varepsilon)}$  denota la bola cerrada de radio  $\varepsilon$  con centro en  $a$
- $\text{Fr}_X(A)$  denota la frontera del conjunto  $A$  en  $X$ .
- $\text{Int}_X(A)$  denota el interior del conjunto  $A$  en  $X$ .
- $f|_A$  denota la función  $f$  restringida al conjunto  $A$ .
- $id_X$  denota la función identidad en el conjunto  $X$ .

### 1.2. Conceptos básicos

De ahora en adelante  $X$  denotará un espacio métrico con métrica  $d$ , salvo que se especifique lo contrario.

Dados un  $A \subset X$ ,  $a \in X$  y  $\varepsilon > 0$ . Definimos

$$S_d(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(a, x) = \varepsilon\},$$

$$B_d(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon) \text{ y}$$

$$\text{dist}(a, A) = \inf \{d(a, b) : b \in A\}.$$

En particular si  $A$  es finito tenemos que

$$\text{dist}(a, A) = \text{mín} \{d(a, b) : b \in A\}.$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$  consideramos

$$F_n(X) = \{A \subset X : 1 \leq |A| \leq n\}$$

con la métrica de Hausdorff,  $H : F_n(X) \times F_n(X) \rightarrow [0, \infty)$ , dada por

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \inf \{\varepsilon > 0 : A \subset B_d(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset B_d(A, \varepsilon)\} \\ &= \text{máx} \{ \text{máx}_{a \in A} \text{dist}(a, B), \text{máx}_{b \in B} \text{dist}(b, A) \} \end{aligned}$$

para cualesquiera  $A, B \in F_n(X)$ .

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , denotemos por  $F_{(m)}(X)$  al siguiente subespacio de  $F_n(X)$ ,  $\{A \subset X : |A| = m\}$ .

**Definición 1.2.1.** Decimos que  $\alpha \subset X$  es un arco si existe  $h : [0, 1] \rightarrow \alpha$  un homeomorfismo. Si  $h(0) = a$  y  $h(1) = b$ , entonces decimos que  $\alpha$  es un arco que va de  $a$  hacia  $b$ .

**Definición 1.2.2.** Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío.

**Definición 1.2.3.** Una gráfica finita es un continuo que se puede escribir como la unión de una cantidad finita de arcos, a los que llamaremos aristas, digamos  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , tales que si  $i \neq j$ ,  $e_i$  intersecta a  $e_j$  sólo en uno o en ambos extremos, para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Como por ejemplo, la que se muestra en la Figura 1.1.

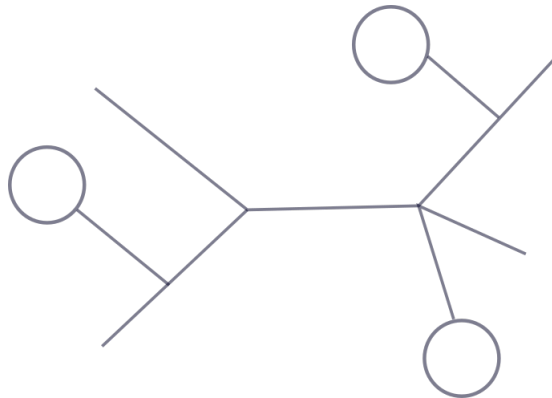


Figura 1.1: Ejemplo de gráfica finita.

**Definición 1.2.4.** Un árbol es una gráfica finita sin subespacios homeomorfos a  $\mathbb{S}^1$ . En la Figura 1.2 se muestra un ejemplo de árbol.

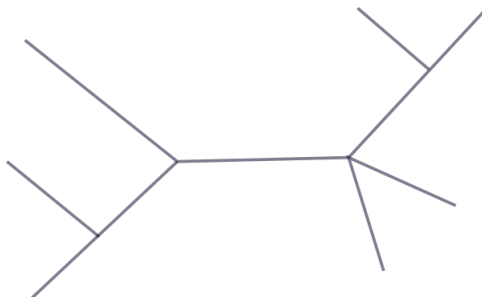


Figura 1.2: Ejemplo de árbol.

**Definición 1.2.5.** Dado  $m \in \mathbb{N}$ , un  $m$ -odo simple es un árbol con  $m$  aristas  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , tales que  $e_i \cap e_j = \{v\}$  para cualesquiera  $i \neq j$  y  $v$  un punto fijo. En la Figura 1.3 se muestra un ejemplo de un 5-odo simple.

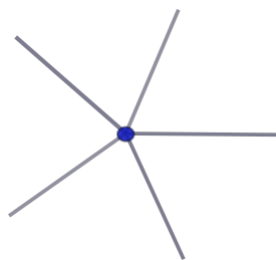


Figura 1.3: 5-odo simple.

**Notación 1.2.6.** Sean  $X$  un árbol. Dados  $a, b \in X$ ,  $\overrightarrow{ab}$  denota el arco que va de  $a$  hacia  $b$ .

**Definición 1.2.7.** Sean  $X$  un árbol con la métrica  $d$ , la distancia por longitud de arco,  $a, b \in X$  y  $0 \leq \lambda < d(a, b)$ , definimos  $a_\lambda^b$  como el único punto en el arco  $\overrightarrow{ab}$  tal que  $d(a, a_\lambda^b) = \lambda$ . Como se muestra en la Figura 1.4.

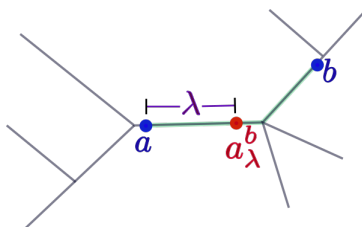


Figura 1.4: Representación de  $a_\lambda^b$ .

**Definición 1.2.8.** Sean  $X$  un árbol con la métrica  $d$ , la distancia por longitud de arco y  $a, b \in X$ , definimos el punto medio de  $\{a, b\}$ , denotado por  $PM(\{a, b\})$ , como el único punto en el arco  $\overrightarrow{ab}$  tal que  $d(a, PM(\{a, b\})) = d(PM(\{a, b\}), b)$ . Como se muestra en la Figura 1.5.

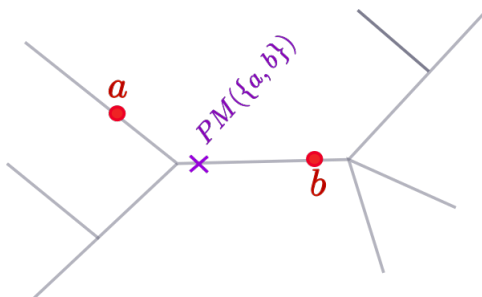


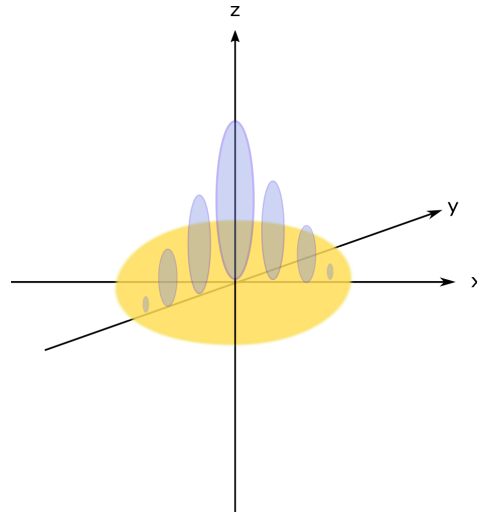
Figura 1.5: Representación del punto medio de  $\{a, b\}$ .

### 1.3. Ejemplos clásicos

En [15] R. Moslki probó que  $F_2(I^2)$  es homeomorfo a  $I^4$  pero para  $n \geq 3$ ,  $F_n(I^2)$  no es homeomorfo a ningún subconjunto de  $\mathbb{R}^{2n}$  y  $F_2(I^n)$  tampoco. Esta sección está dedicada a entender intuitivamente lo que R. Molski lo hizo, para eso él hace uso del siguiente lema el cual define como elemental.

**Lema 1.3.1.** El conjunto  $P = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid p = (\rho \cos \psi, \rho \sen \psi, v \cos \omega, v \sen \omega); 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \psi < 2\pi, 0 \leq v \leq 1 - \rho, 0 \leq \omega < 2\pi\}$  es homeomorfo a  $I^4$ .

*Demostración.* Para la demostración de este lema es de vital importancia entender como es el conjunto  $P$ . Las dos primeras coordenadas de cada elemento del conjunto  $P$  nos indican que se trata de una circunferencia de radio  $\rho$ . La tercera y cuarta coordenadas también nos están diciendo que se trata de una circunferencia pero cuyo radio depende de  $\rho$ . Así que podemos pensar el conjunto  $P$  como si en cada punto del primer círculo formado, pusieramos otro círculo cuyo radio depende de la ubicación del punto, así como se observa en la Figura 1.6.

Figura 1.6: Conjunto  $P$ .

Dado  $p \in P$ , si  $\psi = 0$ , entonces  $p = (\rho \cos 0, \rho \sin 0, v \cos \omega, v \sin \omega) = (\rho, 0, v \cos \omega, v \sin \omega)$ , con  $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - \rho$  y  $0 \leq \omega < 2\pi$ . Al conjunto de puntos de esa forma llamémosle  $C$ , el cual es un cono y sea  $A$  el cilindro circunscrito en el cono  $C$ , como se muestra en la Figura 1.7, el cual podemos describir como

$$A = \{(\bar{\rho}, 0, \bar{v}, \cos \bar{\omega}, \bar{v} \sin \bar{\omega}) \mid 0 \leq \bar{\rho} \leq 1, 0 \leq \bar{\omega} \leq 2\pi, 0 \leq \bar{v} \leq 1\}.$$

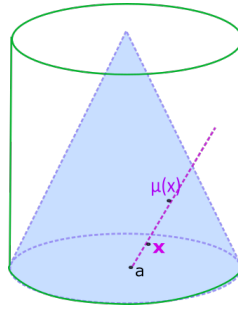
Sea  $a$  el punto del centro de la base común de  $A$  y  $C$ . Definamos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} s : C - \{a\} &\rightarrow C, \text{ donde } s(x) = \overrightarrow{ax} \cap (\text{Fr}(C)) \text{ y} \\ t : C - \{a\} &\rightarrow A, \text{ donde } t(x) = \overrightarrow{ax} \cap (\text{Fr}(A)). \end{aligned}$$

Las cuales son funciones continuas. Definamos  $\mu : C \rightarrow A$ , como

$$\mu(x) = \begin{cases} a + \frac{d(a, t(x))}{d(a, s(x))}(x - a) & \text{si } x \in C - \{a\}, \\ x & \text{si } x = a. \end{cases} \quad (1.1)$$

Notemos que si  $x = (0, 0, v \cos \omega, v \sin \omega)$  con  $0 \leq \omega \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1$ , entonces  $\mu(x) = x$ , es decir, los puntos sobre la base del cono quedan fijos. Intuitivamente lo que hace la función  $\mu$  es inflar el cono  $C$  hasta llenar todo el cilindro dejando la base fija, así como se observa en la Figura 1.7.

Figura 1.7: Efecto de la función  $\mu$ .

Sea  $Q = \{(\bar{\rho} \cos \bar{\psi}, \bar{\rho} \sin \bar{\psi}, \bar{v} \cos \bar{\omega}, \bar{v} \sin \bar{\omega}) \mid 0 \leq \bar{\rho} \leq 1, 0 \leq \bar{\omega} \leq 2\pi, 0 \leq \bar{v} \leq 1, 0 \leq \bar{\psi} < 2\pi\}$ .

Si  $x = (\rho, 0, v \cos \omega, v \sin \omega)$  con  $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - \rho$  y  $0 \leq \omega < 2\pi$ , tenemos que  $\mu(x) = (\bar{\rho}, 0, \bar{v} \cos \bar{\omega}, \bar{v} \sin \bar{\omega})$  con  $0 \leq \bar{\rho} \leq 1, 0 \leq \bar{\omega} \leq 2\pi, 0 \leq \bar{v} \leq 1$ , así dado  $(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi, v \cos \omega, v \sin \omega) \in P$  definimos la función  $h : P \rightarrow Q$  como

$$h((\rho \cos \psi, \rho \sin \psi, v \cos \omega, v \sin \omega)) = (\bar{\rho} \cos \bar{\psi}, \bar{\rho} \sin \bar{\psi}, \bar{v} \cos \bar{\omega}, \bar{v} \sin \bar{\omega})$$

El cual es un homeomorfismo de  $P$  en  $Q$ . Y como  $Q$  es homeomorfo a  $I^4$  concluimos que  $P$  es homeomorfo a  $I^4$ .  $\square$

**Teorema 1.3.2.** *El segundo producto simétrico de  $I^2$  es homeomorfo a  $I^4$ .*

*Demostración.* Consideremos el sistema de coordenadas polares en el plano euclidiano.

Sea  $D_r^2$  el disco de radio,  $r \leq 1$ . Dados  $p, q \in D_r^2$  denotemos por  $L_{pq}$  la recta que pasa por  $p$  y  $q$  y sea  $s = (r \cos \psi, r \sin \psi)$  el centro del segmento que une a  $p$  con  $q$ .

Sea  $\phi$  el ángulo de la rotación positiva desde el eje  $x$  hasta la recta  $L_{pq}$  y llamemos  $a_{pq}$  y  $b_{pq}$  los puntos de intersección de  $L_{pq}$  con la frontera de  $D_r^2$ , como se muestra en la Figura 1.8.

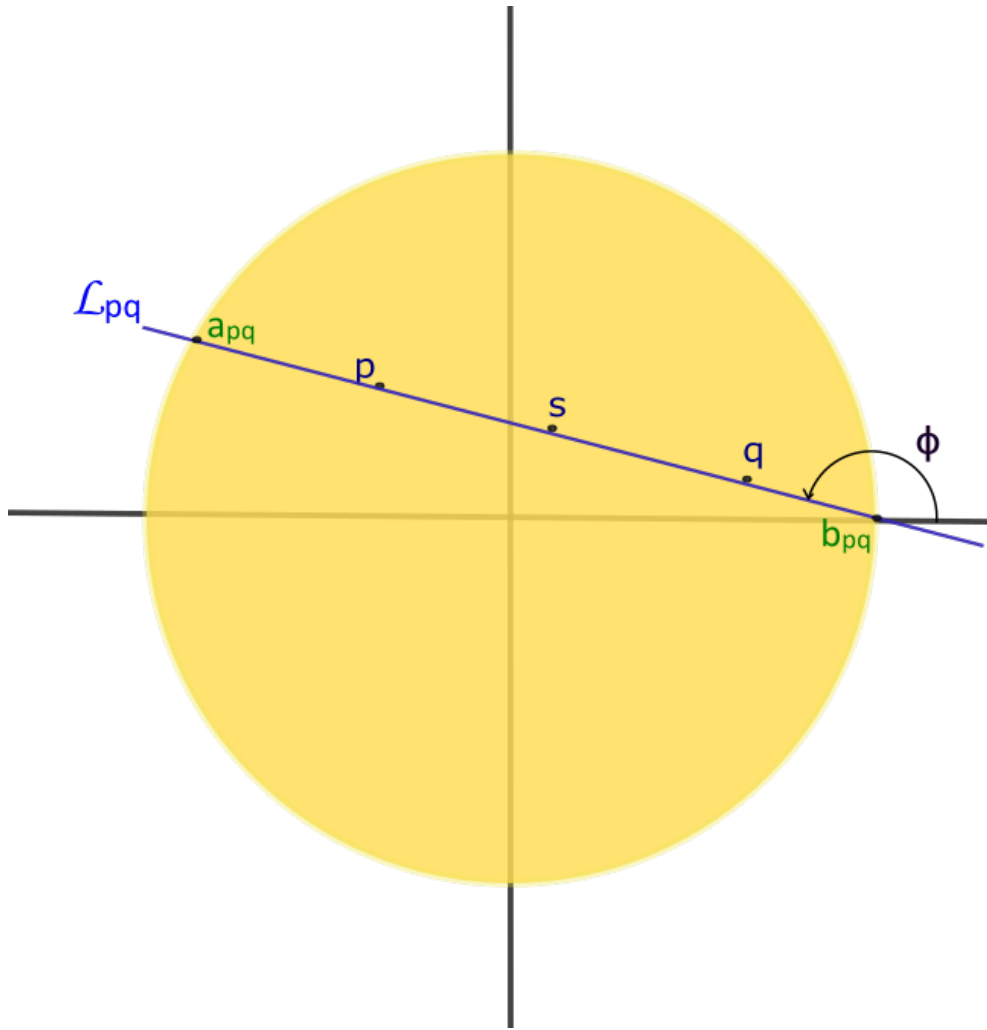


Figura 1.8: Representación de  $p, q, s, \phi, a_{pq}, b_{pq}$  y  $L_{pq}$ .

$$\text{Sean } u = d(p, s) = d(q, s) \quad \text{y}$$

$$d_{pq} = \frac{1}{2} (d(s, a_{pq}) + d(s, b_{pq}) - |d(s, a_{pq}) - d(s, b_{pq})|) = \min\{d(s, a_{pq}), d(s, b_{pq})\}.$$

Notemos que  $u = d(s, p) = d(s, q) \leq d_{pq}$  y que  $1 - r \leq d_{pq}$ .  
 Sea  $P$  el conjunto de puntos de la forma  $(r \cos \psi, r \sin \psi, t \cos \omega, t \sin \omega)$  con  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \psi < 2\pi, 0 \leq t \leq \frac{u(1-r)}{d_{pq}}, 0 \leq \omega \leq 2\phi < 2\pi$  donde  $p, q \in D^2$ .

Ahora definamos la siguiente función  $\Phi : F_2(D_r^2) \rightarrow P$ , como

$$\Phi(\{p, q\}) = \begin{cases} (r \cos \psi, r \sin \psi, \frac{u(1-r)}{d_{pq}} \cos 2\phi, \frac{u(1-r)}{d_{pq}} \sin 2\phi) & \text{si } p \neq q, \\ (r \cos \psi, r \sin \psi, 0, 0) & \text{si } p = q. \end{cases} \quad (1.2)$$

Veamos el efecto de esta función, analicemos algunos casos:

- Si tenemos que  $p = q$ , entonces tenemos que este punto se queda fijo en el plano  $xy$ , como se muestra en la Figura 1.9.

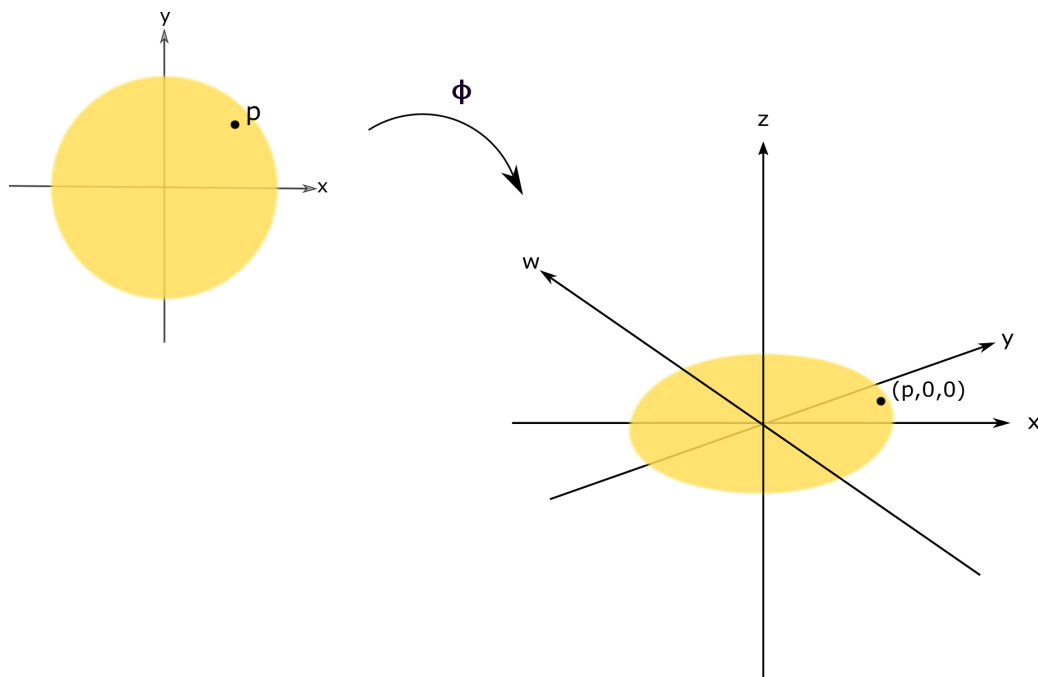


Figura 1.9: Comportamiento de la función  $\Phi$  en  $\{p\}$

- Supongamos que  $p$  y  $q$  están sobre el eje  $x$ . Si  $s = (0, 0)$ , entonces  $\Phi(\{p, q\}) \in \{(0, 0, z, 0) : 0 \leq z \leq 1\}$ , conjunto que se muestra de color verde en la Figura 1.10

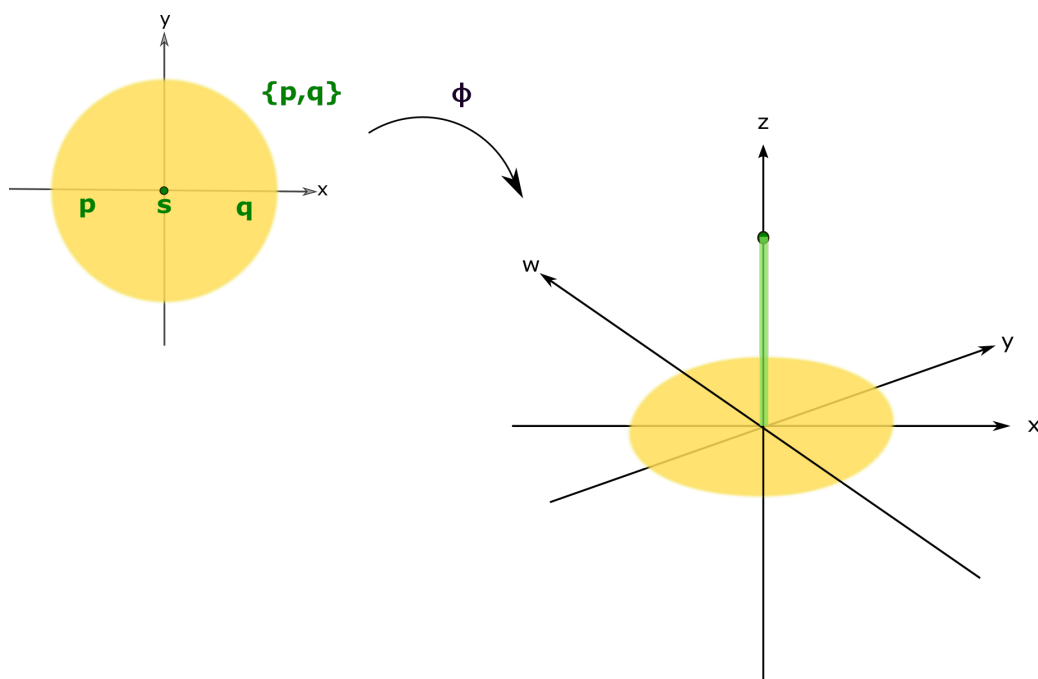


Figura 1.10: Imagen de  $\{p, q\}$  cuando  $p, q$  están en el eje  $x$  y  $s = (0, 0)$ .

Y si sólo sabemos que  $s$  está en el eje  $x$ , entonces

$$\Phi(\{p, q\}) \in \{(r, 0, u, 0) : 0 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq u \leq 1 - r\},$$

conjunto que se representa con el triángulo de color verde en la Figura 1.11.

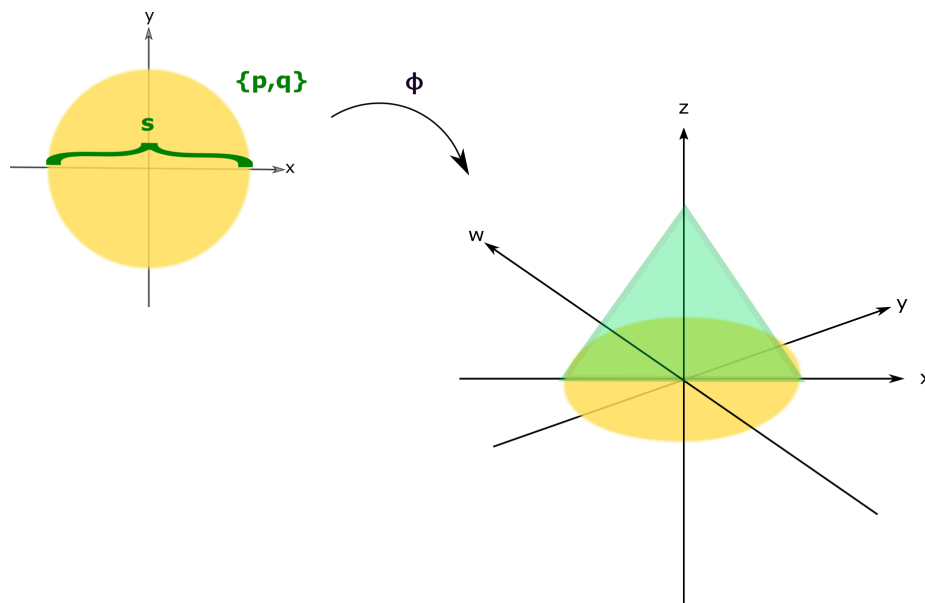


Figura 1.11: Imagen de  $\{p, q\}$  cuando  $p, q$  están en el eje  $x$ .

- Si  $p, q$  están sobre una recta paralela al eje  $x$ , entonces tenemos que  $\Phi(\{p, q\})$  pertenece a un triángulo pero de menor tamaño, como ejemplo véase la Figura 1.12

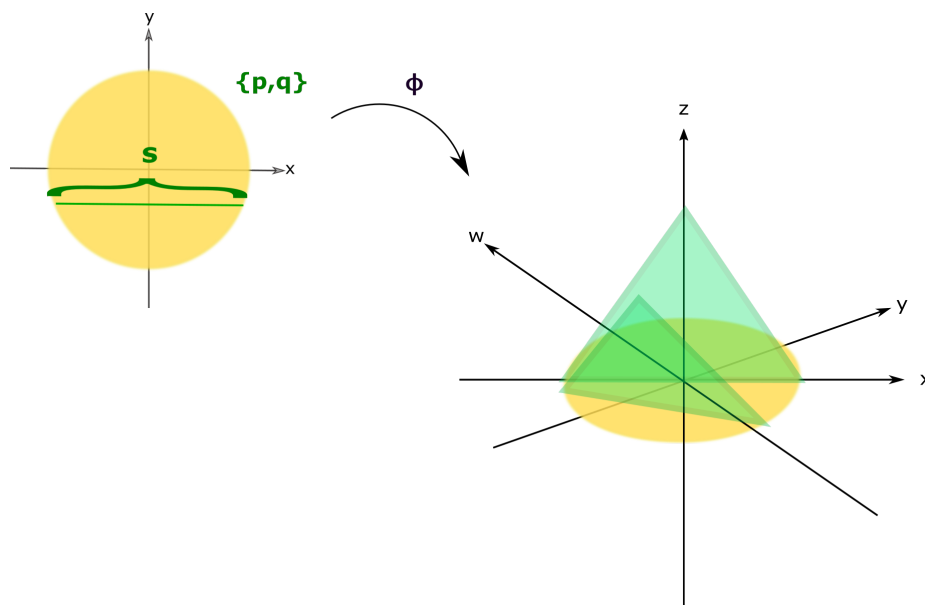


Figura 1.12: Imagen de  $\{p, q\}$  cuando  $p, q$  están en una recta paralela al eje  $x$ .

De manera mas general la imagen de todos los elementos de la forma  $\{p, q\}$  con  $p$  y  $q$  sobre alguna recta paralela al eje  $x$ , es el conjunto de puntos de la forma  $(r \cos \psi, r \sin \psi, \frac{u(1-r)}{d_{pq}}, 0)$  con  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \psi < 2\pi$  y  $0 \leq u \leq 1 - r$ , que se muestra en la Figura 1.13 como el cono de color verde.

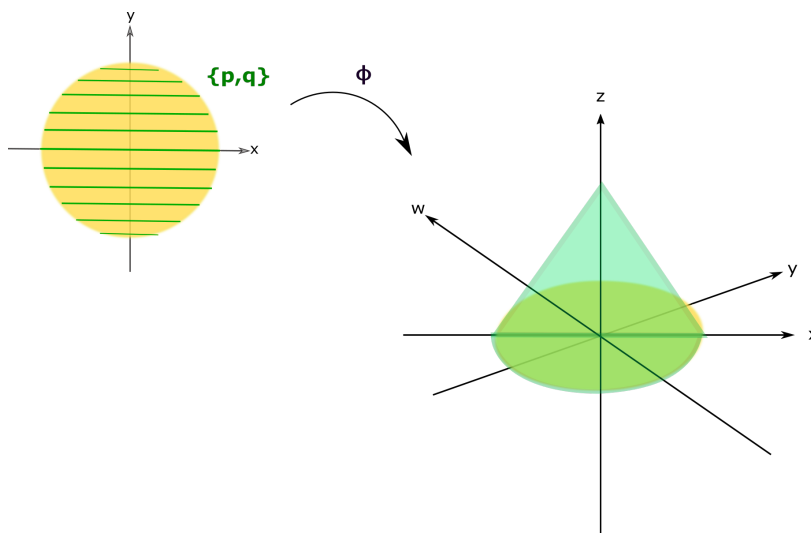


Figura 1.13: Imagen de todos los elementos de la forma  $\{p, q\}$  cuando  $p, q$  están en cualquier recta paralela al eje  $x$ .

- Si  $p$  y  $q$  están sobre alguna recta paralela a la recta identidad, entonces  $\Phi(\{p, q\})$  pertenece al conjunto de puntos de la forma  $(r \cos \psi, r \sin \psi, 0, u)$  con  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \psi < 2\pi$  y  $0 \leq u \leq 1 - r$ , que se representa con el cono azul que se muestra en la Figura 1.14.

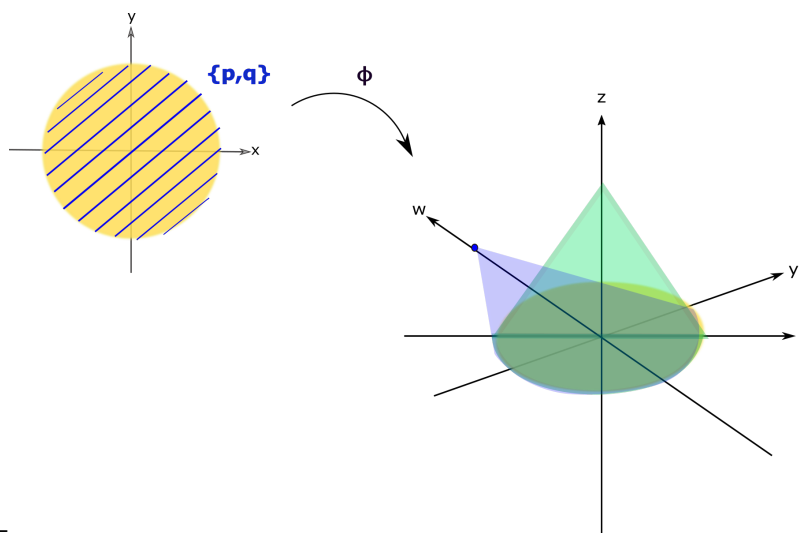


Figura 1.14: Imagen de todos los elementos de la forma  $\{p, q\}$  cuando  $p, q$  están en cualquier recta paralela a la recta identidad.

- Si  $p$  y  $q$  están sobre alguna recta paralela al eje  $y$ , entonces  $\Phi(\{p, q\})$  pertenece al conjunto de puntos de la forma  $(r \cos \psi, r \sin \psi, -u, 0)$  con  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \psi < 2\pi$  y  $0 \leq u \leq 1 - r$ , que se representa con el cono rojo que se muestra en la Figura 1.15.

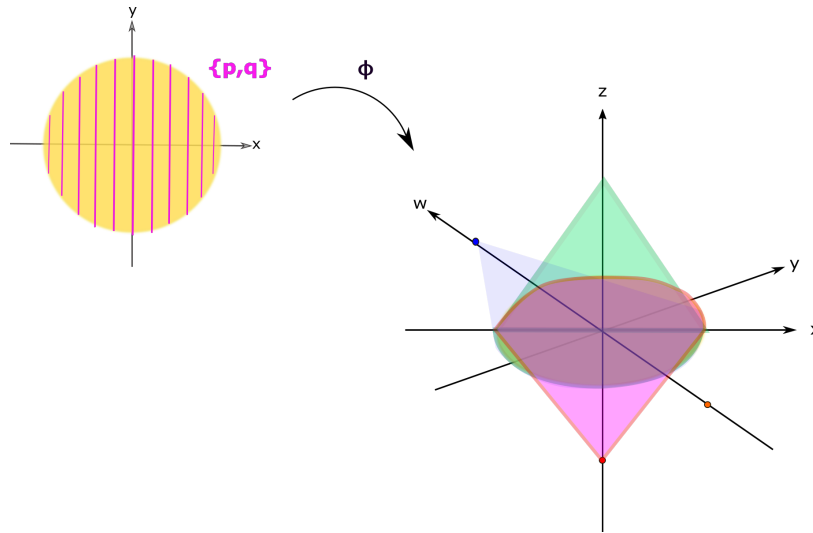


Figura 1.15: Imagen de todos los elementos de la forma  $\{p, q\}$  cuando  $p, q$  están en cualquier recta paralela al eje  $y$ .

- Si  $p$  y  $q$  están sobre alguna recta paralela a la recta menos identidad, entonces  $\Phi(\{p, q\})$  pertenece al conjunto de puntos de la forma siguiente,  $(r \cos \psi, r \sin \psi, 0, -u)$  con  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \psi < 2\pi$  y  $0 \leq u \leq 1 - r$ , que se representa con el cono naranja que se muestra en la Figura 1.16.

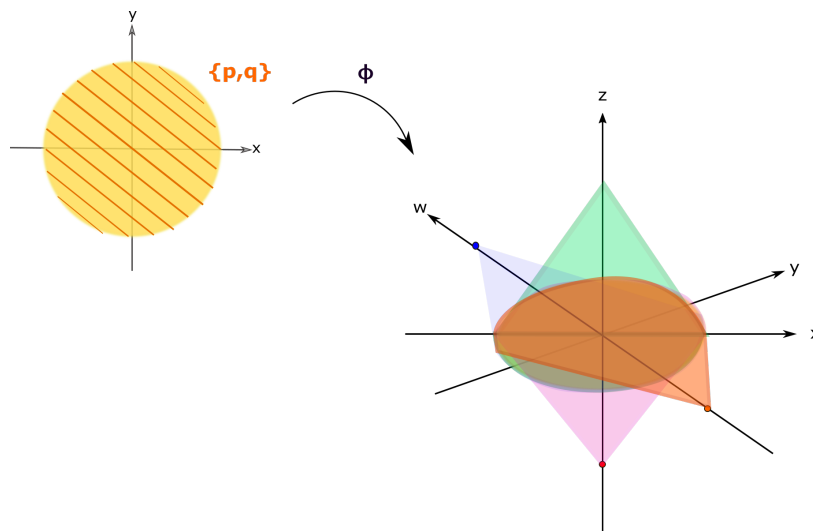


Figura 1.16: Imagen de todos los elementos de la forma  $\{p, q\}$  cuando  $p, q$  están en cualquier recta paralela a la recta menos identidad.

Como  $\Phi$  es una función biyectiva y continua que va de un espacio compacto a un espacio métrico tenemos que  $\Phi$  es un homeomorfismo. Notemos que el conjunto  $P$  está compuesto de una infinidad de conos (como los que conocemos en  $\mathbb{R}^3$ ), cuyo vértice, de cada uno de ellos, está en el plano  $zw$ . Este conjunto  $P$  es un cono en  $\mathbb{R}^4$ , el cual, por el Lema 1.3.1 es homeomorfo a  $I^4$ . Por tanto  $F_2(I^2)$  es homeomorfo a  $I^4$ .  $\square$

**Teorema 1.3.3.** Para  $n \geq 3$ ,  $F_n(D^2)$  no se puede encajar en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

*Demostración.* Sean  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  y  $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$  discos disjuntos a pares con centro en  $x_i^0 = (0, \frac{i-1}{n-1})$  y radio  $r_i = \frac{1}{3(n-1)}$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . En la Figura 1.17 se muestra el caso  $n = 4$ .

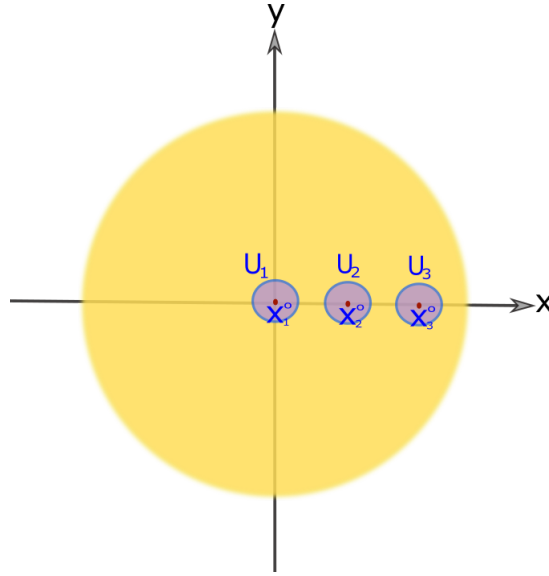


Figura 1.17: Caso de  $n = 4$ .

Consideremos el conjunto  $W \subset F_n(D^2)$ , definido de la siguiente manera

$$W = \{\{x_1, \dots, x_n\} : x_1 \in U_1, \dots, x_{n-2} \in U_{n-2}, x_{n-1}, x_n \in U_{n-1}\}.$$

Consideremos la función  $\Phi$  definida en el Teorema 1.3.2 y ahora definamos la función  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  dada por

$$g(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = (x_1, \dots, x_{n-2}, \Phi(\{x_{n-1}, x_n\})).$$

Notemos que  $g$  es un encaje, pues  $W$  es homeomorfo a  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_{n-2} \times F_2(U_{n-1})$  el cual es compacto, también como  $\mathbb{R}^{2n}$  es un espacio de Hausdorff y  $g$  es continua e inyectiva entonces  $W$  es un homeomorfo a su imagen. Luego como  $\Phi(\{x_{n-1}^0, x_n^0\})$  es un punto interior de  $\Phi(F_2(U_{n-1}))$  entonces tenemos que  $g(\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0\})$  es punto interior de  $g(W)$ .

Supongamos que existe  $h$  un encaje de  $F_2(D^2)$  en  $\mathbb{R}^{2n}$ , entonces por el Teorema de la invarianza del dominio de Brouwer (véase en [8]), tenemos que  $h(\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0\})$  es punto interior de  $h(W)$ .

Ahora consideremos la sucesión de puntos  $\{p_k\} \subset F_n(D^2)$ , donde

$$p_k = \left\{ x_1^0, \left(0, \frac{1}{k}\right), x_2^0, \dots, x_{n-1}^0 \right\}.$$

Una imagen geométrica de esta sucesión se muestra en la Figura 1.18

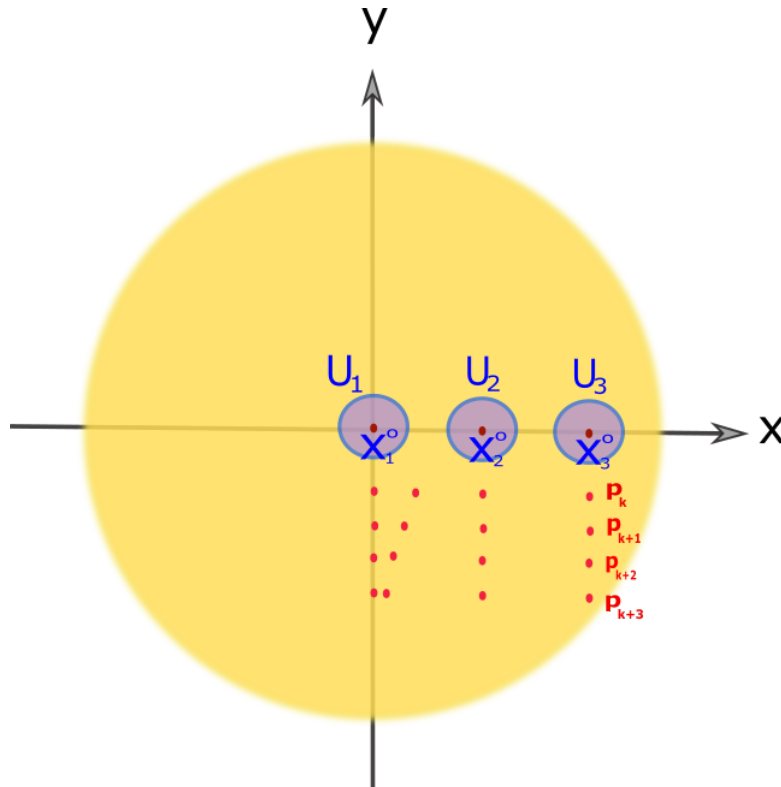


Figura 1.18: Algunos elementos de la sucesión  $\{p_k\}$ .

Notemos que  $p_k \notin W$  y como  $h$  es inyectiva entonces  $h(p_k) \in \mathbb{R}^{2n} - h(W)$ . Sin embargo como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(0, \frac{1}{k}\right) = (0, 0) = x_1^0$ , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \{x_1^0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0\}.$$

Y como  $h$  es continua, entonces debería ocurrir que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(p_k) = h(\{x_1^0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0\}),$$

el cual sabemos que es un punto interior de  $h(W)$ . Lo cual no puede suceder, véase Figura 1.19.

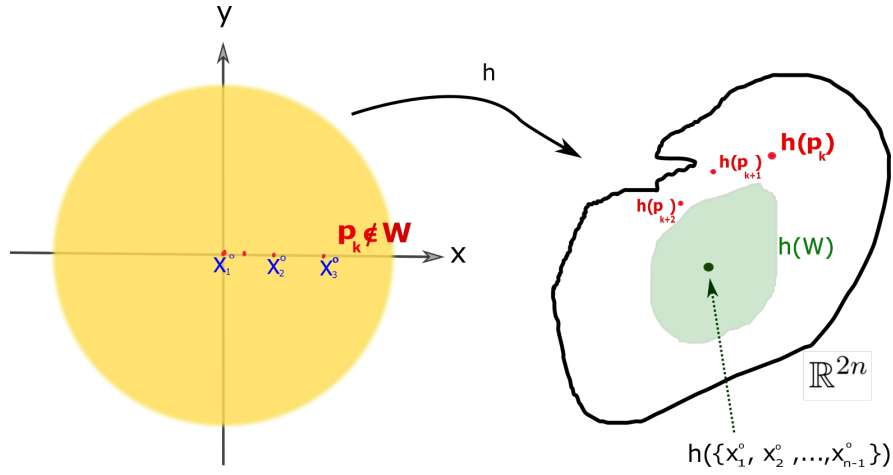


Figura 1.19: Representación de la sucesión bajo la función  $h$ .

Por tanto  $h$  no existe y se cumple el teorema.  $\square$

**Definición 1.3.4.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos el espacio proyectivo real de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , como el conjunto de clases de equivalencia de vectores no nulos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la siguiente relación de equivalencia:

$v$  está relacionado con  $w$  si y sólo si existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tal que  $v = \lambda w$ .

El siguiente paso es probar que para  $n \geq 3$ ,  $F_2(I^n)$  no se puede encajar en  $\mathbb{R}^{2n}$ , y para probarlo nos ayudamos del siguiente lema cuya demostración puede ser consultada en [15, Lema, p. 169].

**Lema 1.3.5.** Para  $n \geq 3$ , el producto cartesiano de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$  no puede ser encajado en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Teorema 1.3.6.** Para  $n \geq 3$ ,  $F_2(I^n)$  no se puede encajar en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

*Demostración.* Sean  $Q$  la bola cerrada unitaria y  $Q_0$  la bola cerrada de radio  $\frac{1}{2}$ , ambas centradas en el origen y de dimensión  $n$  contenidas en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Dados  $p, q \in Q$ , denotemos por  $\overline{PM}(\{p, q\})$  al centro del segmento que une a  $p$  con  $q$ . Consideremos el conjunto  $Z$  dado por

$$Z = \left\{ \{p, q\} \in F_2(Q) : \frac{1}{4} \leq d(p, q) \leq \frac{1}{2} \text{ y } \overline{PM}(\{p, q\}) = s \in Q_0 \right\} \quad (1.3)$$

Dado que para cada elemento  $\{p, q\}$  en  $Z$ , existe una única línea recta que pasa por  $p$  y  $q$ , llamémosle  $L_{pq}$  y además el punto medio,  $s$ , es único, podemos definir la función  $\Psi$  para cada  $\{p, q\} \in Z$  dada por

$$\Psi(\{p, q\}) = \left( s, 4 \left( d(p, q) - \frac{1}{4} \right), L_{pq} \right).$$

Como  $s \in Q_0$  y las líneas rectas  $L \subset \mathbb{R}^n$  que pasan por  $s$  constituyen un espacio homeomorfo al espacio proyectivo de dimensión  $n - 1$ ,  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ , entonces tenemos que  $\Psi : Z \rightarrow Q_0 \times [0, 1] \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ , la cual es continua y biyectiva.

Dado que  $Q_0 \times [0, 1]$  es homeomorfo a  $[0, 1]^{n+1}$  y  $\mathbb{S}^n$  esta contenida en  $[0, 1]^{n+1}$  por el Lema 1.3.5 tenemos que  $[0, 1]^{n+1} \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$  no se puede encajar en  $\mathbb{R}^{2n}$ , así como  $\Psi$  es biyectiva y continua, tenemos que  $Z$  no se puede encajar en  $\mathbb{R}^{2n}$  y por lo tanto tampoco  $F_2(Q)$ .  $\square$

## 1.4. Isometrías en Productos Simétricos

Esta sección, como el título lo indica, esta dedicada al estudio de isometrías en productos simétricos.

**Definición 1.4.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una función biyectiva  $\phi : X \rightarrow X$  es una isometría si

$$d(a, b) = d(\phi(a), \phi(b)),$$

para cualesquiera  $a, b \in X$ .

**Definición 1.4.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Definimos

$$Isom_d(X) = \{\phi : X \rightarrow X : \phi \text{ es una isometría}\}.$$

**Definición 1.4.3.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $Y \subset X$ , definimos

$$Isom_d(X, Y) = \{\phi \in Isom_d(X) : \phi(y) = y \text{ para cada } y \in Y\}.$$

Antes que nada, notemos que dado  $(X, d)$  un espacio métrico, el conjunto  $Isom_d(X)$  con la composición de funciones es un grupo, como lo muestra la siguiente proposición.

**Proposición 1.4.4.**  $(Isom_d(X), \circ)$  es un grupo, donde  $\circ$  denota la operación composición entre funciones.

*Demostración.* Para probar que  $(Isom_d(X), \circ)$  es un grupo, tenemos que probar las siguientes tres cosas:

1. Existencia de un elemento identidad

Tenemos que la función  $id_X \in Isom_d(X)$  y aparte satisface que  $id_x \circ f = f \circ id_x = f$  para cualquier  $f \in Isom_d(X)$ , con lo que queda probada la existencia del elemento identidad.

2. Asocitividad

La operación  $\circ$  satisface que para cualesquiera  $f, g, h \in Isom_d(X)$ ,  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ , es decir, la composición es asociativa.

3. Todo elemento tiene un inverso.

Sea  $f \in \text{Isom}_d(X)$ , dado que  $f : X \rightarrow X$  es biyectiva, entonces existe  $f^{-1} : X \rightarrow X$  tal que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ . Solo basta probar que  $f^{-1}$  es una isometría, para esto sean  $a, b \in X$  entonces tenemos  $f^{-1}(a), f^{-1}(b) \in X$  y como  $f$  es una isometría entonces tenemos que  $d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) = d(f(f^{-1}(a)), f(f^{-1}(b))) = d(a, b)$ , lo que nos dice que  $f^{-1}$  es una isometría.

Por tanto  $(\text{Isom}_d(X), \circ)$  es un grupo.  $\square$

A este grupo le llamaremos el grupo de isometrías.

Ahora, sea  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que cada isometría  $\phi : X \rightarrow X$  induce una función  $\chi_n(\phi) : (F_n(X), H) \rightarrow (F_n(X), H)$  definida por  $\chi_n(\phi)(A) = \phi(A)$ , es decir, dado  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in F_n(X)$ , definimos  $\chi_n(\phi)(A) = \{\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)\}$ , la cual también es una isometría.

Así, si consideramos la función entre los grupos de isometrías

$$\begin{aligned} \chi_n : (\text{Isom}_d(X), \circ) &\rightarrow (\text{Isom}_H(F_n(X)), \circ) \\ \phi &\longmapsto \chi_n(\phi) \end{aligned}$$

Tenemos algunas observaciones que se muestran en las siguientes proposiciones.

**Proposición 1.4.5.**  $\chi_n$  es un homomorfismo.

*Demostración.* Sean  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Isom}_d(X)$  y  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in F_n(X)$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} (\chi_n(\phi_1) \circ \chi_n(\phi_2))(A) &= \chi_n(\phi_1)(\chi_n(\phi_2)(A)) \\ &= \chi_n(\phi_1)(\{\phi_2(a_1), \dots, \phi_2(a_n)\}) \\ &= \{\phi_1(\phi_2(a_1)), \dots, \phi_1(\phi_2(a_n))\} \\ &= \phi_1 \circ \phi_2(\{a_1, \dots, a_n\}) \\ &= \chi_n(\phi_1 \circ \phi_2)(A). \end{aligned}$$

Por tanto  $\chi_n$  es un homomorfismo  $\square$

**Proposición 1.4.6.**  $\chi_n$  es un monomorfismo.

*Demostración.* Sean  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Isom}_d(X)$  tales que  $\phi_1 \neq \phi_2$ , entonces tenemos que existe  $x \in X$  tal que  $\phi_1(x) \neq \phi_2(x)$ . Así, considerando  $A = \{x\}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \chi_n(\phi_1)(A) &= \{\phi_1(x)\} \\ &\neq \{\phi_2(x)\} = \chi_n(\phi_2)(A) \end{aligned}$$

Es decir,  $\chi_n(\phi_1) \neq \chi_n(\phi_2)$ . Por tanto  $\chi_n$  es un monomorfismo.  $\square$

**Observación 1.4.7.**  $\chi_n : (\text{Isom}_d(X), \circ) \rightarrow (\text{Isom}_H(F_n(X)), \circ)$  es un isomorfismo si y sólo si  $\chi_n$  es un epimorfismo, es decir, para cada  $\Phi \in \text{Isom}_H(F_n(X))$  existe  $\phi \in \text{Isom}_d(X)$  tal que  $\Phi = \chi_n(\phi)$ .

**Observación 1.4.8.**  $\chi_1 : (Isom_d(X), \circ) \rightarrow (Isom_H(F_1(X)), \circ)$  es un isomorfismo.

Recientemente Borovikova e Ibragimov probaron en [3, Teorema 9, p. 11] que  $\chi_3 : (Isom_d(\mathbb{R}), \circ) \rightarrow (Isom_H(F_n(\mathbb{R}), \circ))$  es un isomorfismo, e hicieron la siguiente pregunta

**Pregunta 1.4.9.** ¿*Toda isometría en  $F_n(\mathbb{R})$  es inducida de una isometría en  $\mathbb{R}$ , es decir,  $\chi_n : (Isom_d(\mathbb{R}), \circ) \rightarrow (Isom_H(F_n(\mathbb{R}), \circ))$  es un isomorfismo para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ?*

En [10, Teorema 1.1, p. 20] N. Chinen prueba un resultado mas general, que da respuesta afirmativa a la Pregunta 1.4.9, esta sección está dedicada a ver como fue que lo hizo. A continuación se demuestra el lema del cual se auxilió para probar que  $\chi_n$  es un isomorfismo cuando  $X = \mathbb{R}^m$  con  $m \in \mathbb{N}$ .

**Lema 1.4.10.** Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces

$$\chi_n : (Isom_d(X), \circ) \rightarrow (Isom_H(F_n(X)), \circ)$$

es un isomorfismo si y sólo si

1. Para cada  $\Phi \in Isom_H(F_n(X))$ ,  $\Phi|_{F_1(X)} \in Isom_H(F_1(X))$ ;
2.  $Isom_H(F_n(X), F_1(X)) = \{id_{F_n(X)}\}$ .

*Demostración.* Para la necesidad. Para 1) Sea  $\Phi \in Isom_H(F_n(X))$ , por hipótesis existe  $\phi \in Isom_d(X)$  tal que  $\chi_n(\phi) = \Phi$ . Así, para cualquier  $x \in X$ ,  $\Phi(\{x\}) = \{\phi(x)\}$ , por tanto  $\Phi|_{F_1(X)} \in Isom_H(F_1(X))$ .

Para 2) Claramente  $\{id_{F_n(X)}\} \subset Isom_H(F_n(X), F_1(X))$ , para la otra contención sea  $\Phi \in Isom_H(F_n(X), F_1(X))$ , por definición  $\Phi \in Isom_H(F_n(X))$  y  $\Phi(\{x\}) = \{x\}$  para todo  $x \in X$ . Luego por hipótesis existe  $\phi \in Isom_d(X)$  tal que  $\Phi = \chi_n(\phi)$ , por lo que  $\{\phi(x)\} = \{x\}$ . Así  $\phi = id_X$  y por tanto  $\Phi = id_{F_n(X)}$ .

Para la suficiencia sea  $\Phi \in Isom_H(F_n(X))$ , por 1)  $\Phi|_{F_1(X)} \in Isom_H(F_1(X))$ , y por la Observación 1.4.8,  $\phi = \chi_1^{-1}(\Phi) \in Isom_d(X)$  existe. Sea  $\Phi' = \chi_n(\phi^{-1}) \circ \Phi \in Isom_H(F_n(X))$ . Nótese que  $\chi_n(\phi^{-1}) = \chi_n^{-1}(\phi)$  y  $\Phi|_{F_1(X)} = \chi_n(\phi)|_{F_1(X)}$ . Así,  $\Phi'|_{F_1(X)} = (\chi_n(\phi^{-1}) \circ \Phi)|_{F_1(X)} = (\chi_n^{-1}(\phi) \circ \chi_n(\phi))|_{F_1(X)} = id_{F_1(X)}$ . Luego, por 2),  $\Phi' = \chi_n^{-1}(\phi) \circ \Phi = id_X$ , es decir,  $\chi_n(\phi) = \Phi$ . Por tanto, por la Observación 1.4.7,  $\chi_n$  es un isomorfismo.  $\square$

Sean  $X$  un espacio con métrica  $d$ ,  $a \in X$  y  $\varepsilon > 0$ . Recordemos que

$$S_d(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(a, x) = \varepsilon\}.$$

**Definición 1.4.11.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $A \in F_n(X)$ . Definimos

$$D_n(A, \varepsilon) = \sup \{k \in \mathbb{N} : A_1, \dots, A_k \in S_H(A, \varepsilon) \text{ y } H(A_i, A_j) = 2\varepsilon \\ \text{para } 1 \leq i < j \leq k\}.$$

**Ejemplo 1.4.12.** Sean  $A = \{x\} \in F_1(\mathbb{R})$  y  $\varepsilon > 0$ . Se tiene que  $D_1(A, \varepsilon) = 2$ .

**Ejemplo 1.4.13.** Sean  $A = \{x, y\} \in F_{(2)}(\mathbb{R})$  y  $\varepsilon > 0$ . Se tiene que  $D_2(A, \varepsilon) = 4$ .

**Proposición 1.4.14.** Sean  $l, n, m \in \mathbb{N}$  con  $n, m \geq 2$ ;  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  con  $0 < \varepsilon \leq 1$  y  $X = \mathbb{R}^l$  ó  $X = \mathbb{S}^l$ . Entonces se satisface lo siguiente:

1) si  $A \in F_1(X)$  entonces  $D_n(A, \varepsilon) = 3$ ,

2) si  $A \in F_{(m)}(X)$  entonces  $D_n(A, \varepsilon) > 3$ .

*Demostración.* Sea  $y \in \overline{B_d(x, \varepsilon)}$ . Observemos que se satisfacen las siguientes dos cosas:

a) Si  $y \in S_d(x, \varepsilon)$ , entonces existe un único  $y' \in \overline{B_d(x, \varepsilon)}$  tal que  $d(y, y') = 2\varepsilon$ .

b) Si  $y \notin S_d(x, \varepsilon)$ , entonces no existe  $y' \in \overline{B_d(x, \varepsilon)}$  tal que  $d(y, y') = 2\varepsilon$ .

Para demostrar 1) Notemos que si  $B, C \in F_n(S_d(A, \varepsilon)) \setminus F_1(S_d(A, \varepsilon))$  entonces  $H(B, C) < 2\varepsilon$ , es decir, no podemos tener al mismo tiempo dos elementos  $B, C$  en  $S_d(A, \varepsilon)$  con cardinalidad mayor o igual que dos tales que  $H(B, C) = 2\varepsilon$ . Esto nos indica que los elementos que nos interesan para calcular  $D_n(A, \varepsilon)$ ;  $A_1, \dots, A_m \in S_H(A, \varepsilon) \cap F_1(X)$ , tienen las siguientes dos opciones:

- I)  $A_1 \dots A_m \in F_1(S_H(A, \varepsilon))$  con  $H(A_i, A_j) = 2\varepsilon$  para  $i \neq j$ , donde se tiene por a) y b) que  $m = 2$ .
- II)  $A_m \notin F_1(X)$  y  $A_1 \dots, A_{m-1} \in F_1(S_H(A, \varepsilon))$  con  $H(A_i, A_j) = 2\varepsilon$  para  $i \neq j$ , en este caso por a) y b) se tiene que  $m - 1 = 2$ , por lo que  $m = 3$ , la cual es una cota superior del conjunto

$$\{k \in \mathbb{N} : A_1, \dots, A_k \in S_H(A, \varepsilon) \text{ y } H(A_i, A_j) = 2\varepsilon \text{ para } 1 \leq i < j \leq k\}.$$

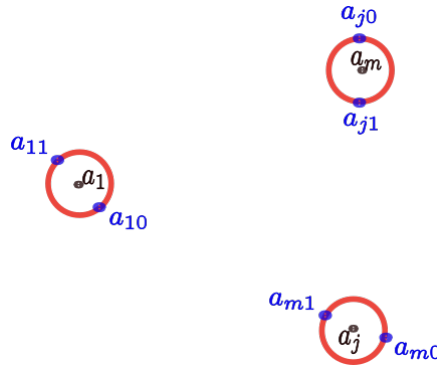
Por tanto, en cualquier opción concluimos que  $D_n(A, \varepsilon) \leq 3$ .

Para probar la otra desigualdad sean  $a, a' \in S_d(A, \varepsilon)$ , con  $d(a, a') = 2\varepsilon$ . Definamos  $B_1 = \{a\}$ ,  $B_2 = \{a'\}$  y  $B_3 = \{a, a'\}$ , notemos que  $B_1, B_2, B_3 \in S_H(A, \varepsilon)$  y  $H(B_i, B_j) = 2\varepsilon$  para  $i \neq j$ . Es decir,

$$3 \in \{k \in \mathbb{N} : A_1, \dots, A_k \in S_H(A, \varepsilon) \text{ y } H(A_i, A_j) = 2\varepsilon \text{ para } 1 \leq i < j \leq k\}.$$

Por tanto  $D_n(A, \varepsilon) \geq 3$ . Con lo que queda concluido el inciso 1).

Para probar 2) supongamos que  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ , para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  y  $k \in \{0, 1\}$  definamos  $a_{jk} \in S_d(a_j, \varepsilon)$  tal que  $d(a_{j0}, a_{j1}) = 2\varepsilon$ , como se muestra en la Figura 1.20.

Figura 1.20: Ejemplo en  $\mathbb{R}^2$  de los puntos  $a_{jk}$ .

Para cada  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \{0, 1\}^m$  definamos  $A_\theta = \{a_{1\theta_1}, a_{2\theta_2}, \dots, a_{m\theta_m}\}$ . Observemos que para cada  $\theta, \theta' \in \{0, 1\}^m$  se satisface:

- $A_\theta \in S_H(A, \varepsilon)$  y
- $H(A_\theta, A_{\theta'}) = 2\varepsilon$  para  $\theta \neq \theta'$ .

Como podemos encontrar  $2^m$ ,  $A_\theta$  diferentes que satisfagan los puntos anteriores concluimos que

$$D_n(A, \varepsilon) \geq 2^m > 3.$$

□

**Definición 1.4.15.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico, para cada  $A \in F_n(X)$  definimos

$$r(A) = \min \{1, d(a, a') : a, a' \in A, a \neq a'\}.$$

**Proposición 1.4.16.** Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $\Phi \in \text{Isom}_H(F_n(X))$ . Si  $A \in F_n(X)$  y  $0 < \varepsilon < \min \{r(A), r(\Phi(A))\}$  entonces  $D_n(A, \varepsilon) = D_n(\Phi(A), \varepsilon)$ .

*Demostración.* Por definición y como  $\Phi$  es una isometría tenemos que

$$\begin{aligned} D_n(A, \varepsilon) &= \sup \{k \in \mathbb{N} : A_1, \dots, A_k \in S_H(A, \varepsilon) \text{ y } H(A_i, A_j) = 2\varepsilon \\ &\quad \text{para } 1 \leq i < j \leq k\} \\ &= \sup \{k \in \mathbb{N} : \Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k) \in S_H(\Phi(A), \varepsilon) \text{ y } H(\Phi(A_i), \Phi(A_j)) = 2\varepsilon \\ &\quad \text{para } 1 \leq i < j \leq k\} \\ &= D_n(\Phi(A), \varepsilon). \end{aligned}$$

□

**Lema 1.4.17.** Sean  $l, n \in \mathbb{N}$  y  $X = \mathbb{R}^l$  ó  $X = \mathbb{S}^l$ . Si  $\Phi \in \text{Isom}_H(F_n(X))$ , entonces  $\Phi|_{F_1(X)} \in \text{Isom}_H(F_1(X))$ .

*Demostración.* Sean  $A \in F_1(X)$  y  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  con  $\varepsilon < 1$ , para demostrar este lema basta con probar que  $\Phi(A) \in F_1(X)$ , lo cual se cumple, pues por las proposiciones 1.4.14 y 1.4.16, tenemos que

$$D_n(\Phi(A), \varepsilon) = D_n(A, \varepsilon) = 3,$$

luego por la Proposición 1.4.14 concluimos que

$$\Phi(A) \in F_1(X).$$

□

**Notación 1.4.18.** Sean  $l, n \in \mathbb{N}$  y  $A \in F_n(\mathbb{R}^l)$ , denotemos al conjunto convexo mas pequeño que contiene a  $A$  por  $\text{conv}(A)$ , al cual llamaremos convexo de  $A$ . Y denotemos el conjunto  $A \cap \text{Fr}_{\mathbb{R}}(\text{conv}(A))$ , por  $\text{conv}(A)^{(0)}$ , al cual llamaremos el conjunto de vertices de  $\text{conv}(A)$ .

**Ejemplo 1.4.19.** Sea  $A \in F_3(\mathbb{R}^2)$

1. Si los elementos de  $A$  estan en la posición de la Figura 1.21.

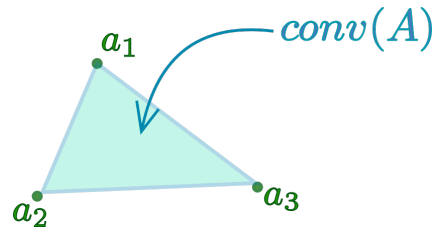


Figura 1.21: Posición 1

Tenemos que  $\text{conv}(A)^0 = A$ .

2. Si los elementos de  $A$  estan en la posición de la Figura 1.22,

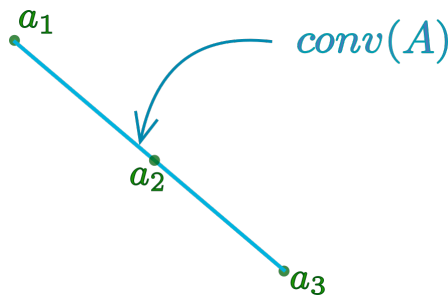


Figura 1.22: Posición 2

Tenemos que  $\text{conv}(A)^0 = \{a_1, a_3\}$ .

**Observación 1.4.20.**  $\text{conv}(A)^{(0)} \subset \text{conv}(A)$ .

El siguiente resultado nos muestra la relación que existe entre la imagen de un elemento del  $n$ -ésimo producto simétrico de  $\mathbb{R}^l$ , digamos  $A$ , bajo cierto tipo de isometrías, el conjunto convexo de  $A$  y el conjunto de sus vertices.

**Lema 1.4.21.** Sean  $l, n \in \mathbb{N}$  y  $A \in F_n(\mathbb{R}^l)$ . Si  $\Phi \in \text{Isom}_H(F_n(\mathbb{R}^l), F_1(\mathbb{R}^l))$ , entonces  $\text{conv}(A)^{(0)} \subset \Phi(A) \subset \text{conv}(A)$ .

*Demostración.* Comencemos probando la primer contención. Sean  $a \in \text{conv}(A)$ ,  $H$  el hiperplano en  $\mathbb{R}^l$  de dimensión  $l - 1$  tal que  $H \cap \text{conv}(A) = \{a\}$ , sea  $C$  el semiespacio cerrado y acotado por  $H$  que contiene a  $\text{conv}(A)$  y sea  $L$  la recta que contiene a  $a$  y es perpendicular a  $H$ , una representación para el caso  $l = 2$  se muestra en la Figura 1.23.

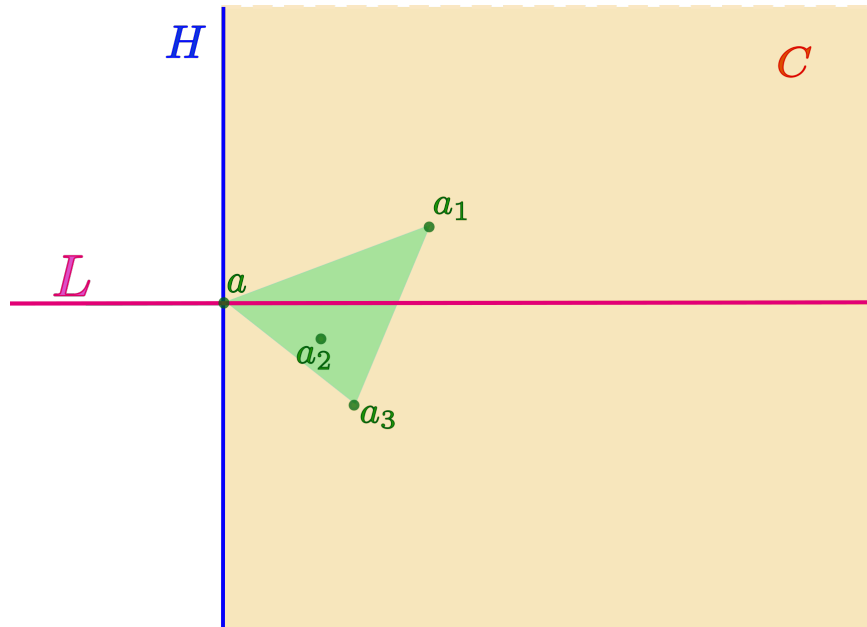


Figura 1.23: Representación en  $\mathbb{R}^2$  de  $H$ ,  $L$ ,  $C$  y los elementos de  $A$ .

Tenemos que existe  $x \in C \cap L$  tal que  $\text{conv}(A) \subset \overline{B_d(x, r)}$  y  $\text{conv}(A) \cap S_d(x, r) = \{a\}$  con  $r = d(x, a)$ , como se muestra en la Figura 1.24. Luego como

$$H(\{x\}, \Phi(A)) = H(\Phi(\{x\}), \Phi(A)) = H(\{x\}, A) = d(a, x) = r.$$

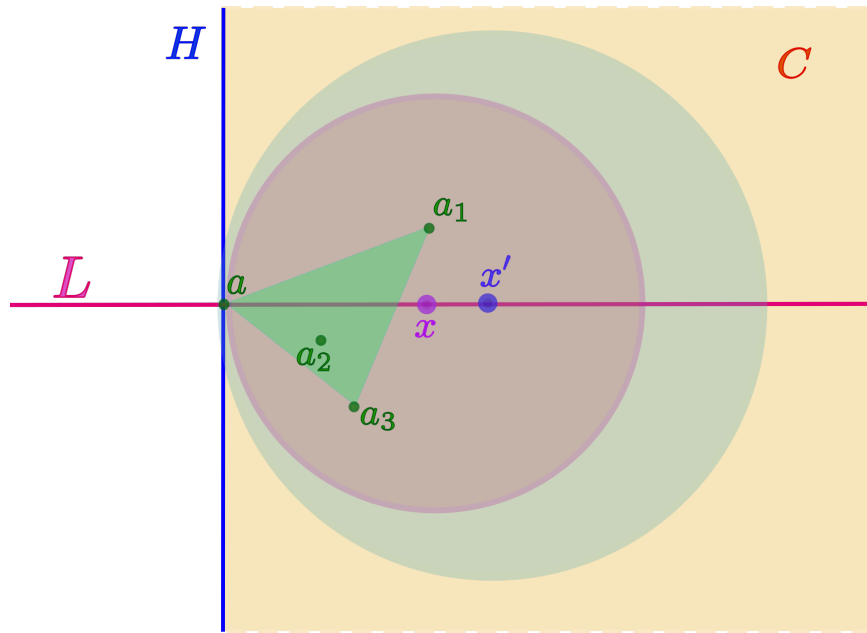


Figura 1.24: Representación en  $\mathbb{R}^2$  de  $x$  y  $x'$ .

Así tenemos que  $\Phi(A) \subset \overline{B_d(x, r)}$  y  $S_d(x, r) \cap \Phi(A) \neq \emptyset$ .  
 Sea  $x' \in C \cap L$  tal que  $\text{conv}(A) \subset \overline{B_d(x', r')}$  y  $\text{conv}(A) \cap S_d(x', r') = \{a\}$  con  $r' > r$ , (como se muestra en la Figura 1.24). Por un argumento similar al anterior tenemos que  $S_d(x', r') \cap \Phi(A) \neq \emptyset$  y que  $S_d(x', r') \cap \overline{B_d(x, r)} = \{a\}$ , es decir tenemos una situación como la que se presenta en la Figura 1.25

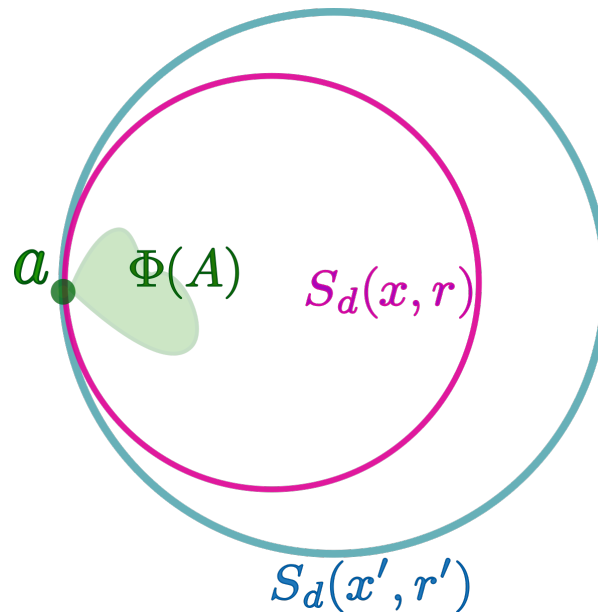


Figura 1.25: Representación en  $\mathbb{R}^2$  de  $S_d(x, r)$ ,  $S_d(x', r')$  y  $\Phi(A)$ .

Por tanto  $a \in \Phi(A)$ , con lo que queda probada la primera contención.

Para la segunda contención ocuparemos la primera contención, cambiando  $A$  por  $\Phi(A)$  y  $\Phi$  por  $\Phi^{-1} \in \text{Isom}_H(F_n(\mathbb{R}^l), F_1(\mathbb{R}^l))$ , con lo que obtenemos que

$$\text{conv}(\Phi(A))^{(0)} \subset \Phi^{-1}(\Phi(A)) = A.$$

Así,  $\text{conv}(\text{conv}(\Phi(A))^{(0)}) \subset \text{conv}(A)$  y como  $\Phi(A) \subset \text{conv}(\text{conv}(\Phi(A))^{(0)})$ , se concluye que

$$\Phi(A) \subset A.$$

□

Ahora definamos nuevos conceptos que nos serán útiles para probar otros resultados.

**Definición 1.4.22.** Sean  $l, n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $A \in F_n(\mathbb{R}^l)$ . Definimos

$$S_H^c(A, \varepsilon) = \{B \in S_H(A, \varepsilon) : \text{conv}(A) = \text{conv}(B)\}$$

y

$$D_n^c(A, \varepsilon) = \sup \{k \in \mathbb{N} : A_1, \dots, A_k \in S_H^c(A, \varepsilon) \text{ y } H(A_i, A_j) = 2\varepsilon \text{ para } 1 \leq i < j \leq k\}.$$

**Ejemplo 1.4.23.** Sean  $A = \{x, y, z\} \in F_3(\mathbb{R})$  con  $x, y, z$  como se muestra en la Figura 1.26 y  $0 < \varepsilon < \frac{r(A)}{2}$ .

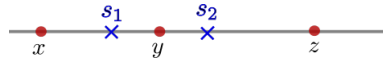


Figura 1.26: Representación de los elementos de  $A$ .

Tenemos que

$$S_H^c(A, \varepsilon) = \{\{x, s_1, z\}, \{x, s_2, z\}\}.$$

Y como  $H(\{x, s_1, z\}, \{x, s_2, z\}) = 2\varepsilon$ . Entonces,

$$D_n^c(A, \varepsilon) = 2.$$

**Ejemplo 1.4.24.** Sean  $A = \{x, y, z, w\} \in F_4(\mathbb{R}^2)$  con  $x, y, z, w$  como se muestra en la Figura 1.27 y  $0 < \varepsilon < \frac{r(A)}{2}$ .

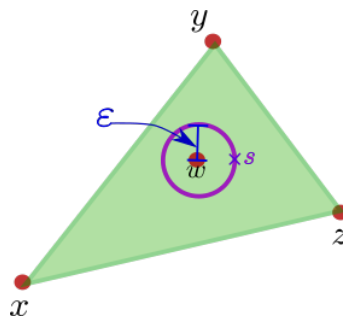


Figura 1.27: Representación de  $\varepsilon$  y los elementos de  $A$ .

Tenemos que

$$S_H^c(A, \varepsilon) = \{\{x, y, z, s\} : d(s, w) = \varepsilon\}.$$

Así,

$$D_n^c(A, \varepsilon) = 2.$$

**Proposición 1.4.25.** Sean  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 3$ ,  $A \in F_n(\mathbb{R})$  y  $0 < \varepsilon < \frac{r(A)}{5}$ . Se tiene que  $A \in F_{(2)}(\mathbb{R})$  si y sólo si  $D_n^c(A, \varepsilon) = 1$ .

*Demostración.* Supongamos que  $D_n^c(A, \varepsilon) \geq 2$ , entonces existen  $C, D \in F_n(\mathbb{R})$  tales que  $C, D \in S_H^c(A, \varepsilon)$  y  $H(C, D) = 2\varepsilon$ . Luego como  $\text{conv}(A) = \text{conv}(C) = \text{conv}(D)$ , por la Observación 1.4.20,  $A = \text{conv}(C)^{(0)} = \text{conv}(D)^{(0)}$ , así  $A \subset C \cap D$ . Y entonces  $C \cup D \subset \overline{B_d(A, \varepsilon)} \subset \overline{B_d(C, \varepsilon)} \cap \overline{B_d(D, \varepsilon)}$ , es decir,  $H(C, D) \leq \varepsilon$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $D_n^c(A, \varepsilon) = 1$ .

Ahora, sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $3 \leq m \leq n$  y probemos la contrarrecíproca, es decir, que si  $A \in F_m(\mathbb{R})$  entonces  $D_n^c(A, \varepsilon) \geq 2$ . Elijamos  $a \in A - \{\text{mín } A, \text{máx } A\}$  y definamos  $E = (A - \{a\}) \cup \{a - \varepsilon\}$  y  $F = (A - \{a\}) \cup \{a + \varepsilon\}$ . Tenemos que  $E, F \in S_H^c(A, \varepsilon)$  y  $H(E, F) = 2\varepsilon$ . Por tanto  $D_n^c(A, \varepsilon) \geq 2$ .  $\square$

**Proposición 1.4.26.** Sean  $l, n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . Si  $\Phi \in \text{Isom}_H(F_n(\mathbb{R}^l), F_1(\mathbb{R}^l))$ ,  $A \in F_n(\mathbb{R}^l)$  y  $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{r(A)}{5}, \frac{r(\Phi(A))}{5}\right\}$ , entonces

$$D_n^c(A, \varepsilon) = D_n^c(\Phi(A), \varepsilon).$$

*Demostración.* Primero notemos que

$$\Phi(S_H^c(A, \varepsilon)) = S_H^c(\Phi(A), \varepsilon).$$

Para probar que  $\Phi(S_H^c(A, \varepsilon)) \subset S_H^c(\Phi(A), \varepsilon)$ . Sea  $D \in S_H^c(A, \varepsilon)$ , por definición  $H(A, D) = \varepsilon$  y  $\text{conv}(A) = \text{conv}(D)$ , luego como  $\Phi \in \text{Isom}_H(F_n(\mathbb{R}^l))$ , entonces  $H(A, B) = H(\Phi(A), \Phi(B))$ . Por otra parte, por el Lema 1.4.21 tenemos que  $\text{conv}(\Phi(A)) = \text{conv}(A) = \text{conv}(B) = \text{conv}(\Phi(B))$ . Por tanto  $\Phi(D) \in S_H^c(\Phi(A), \varepsilon)$ .

La otra contención es análoga pero considerando  $\Phi^{-1}$ . Con esto queda probada la igualdad. Y así concluimos que

$$\begin{aligned} D_n^c(A, \varepsilon) &= \sup \{k \in \mathbb{N} : A_1, \dots, A_k \in S_H^c(A, \varepsilon) \text{ y } H(A_i, A_j) = 2\varepsilon \\ &\quad \text{para } 1 \leq i < j \leq k\} \\ &= \sup \{k \in \mathbb{N} : \Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k) \in \Phi(S_H^c(A, \varepsilon)) \text{ y } H(\Phi(A_i), \Phi(A_j)) = 2\varepsilon \\ &\quad \text{para } 1 \leq i < j \leq k\} \\ &= \sup \{k \in \mathbb{N} : \Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k) \in S_H^c(\Phi(A), \varepsilon) \text{ y } H(\Phi(A_i), \Phi(A_j)) = 2\varepsilon \\ &\quad \text{para } 1 \leq i < j \leq k\} \\ &= D_n^c(\Phi(A), \varepsilon). \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 1.4.27.** Sean  $l, n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . Si  $\Phi \in \text{Isom}_H(F_n(\mathbb{R}^l), F_1(\mathbb{R}^l))$ , entonces  $\Phi|_{F_2(\mathbb{R}^l)} = \text{id}_{F_2(\mathbb{R}^l)}$ .

*Demostración.* Sea  $A \in F_{(2)}(\mathbb{R}^l)$ , por el Lema 1.4.21 tenemos que

$$A = \text{conv}(A)^{(0)} \subset \Phi(A),$$

así que sólo basta probar que  $\Phi(A) \in F_2(\mathbb{R}^l)$  para concluir que  $\Phi(A) = A$ . Dividamos esta demostración en dos casos:

**Caso I.**  $n = 2$ .

Trivialmente  $\Phi(A) \in F_2(\mathbb{R}^l)$ .

**Caso II.**  $n \geq 3$ .

Este caso dividamoslo en los dos subcasos siguientes:

**Subcaso a.** Si  $l = 1$ , entonces por las proposiciones 1.4.25 y 1.4.26 tenemos que  $\Phi(A) \in F_2(\mathbb{R})$ .

**Subcaso b.** Si  $l \geq 2$ , sea  $L$  la recta que contiene a  $A$ , por el Lema 1.4.21 tenemos que  $\Phi(F_n(L)) = F_n(L)$ , es decir,  $\Phi|_{F_n(L)} \in \text{Isom}_H(F_n(L))$ . Así aplicando el Subcaso a. tenemos que  $\Phi(A) = A$ .

Por tanto

$$\Phi|_{F_2(\mathbb{R}^l)} = \text{id}_{F_2(\mathbb{R}^l)}.$$

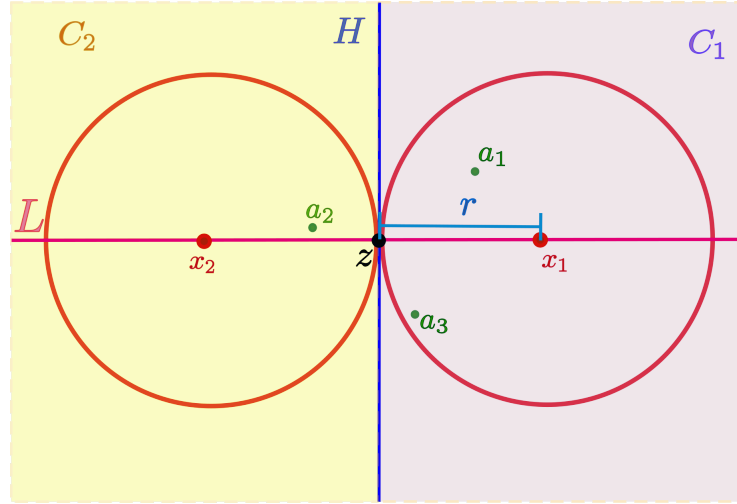
□

Con los lemas anteriores estamos en condiciones de probar el siguiente resultado, que es aún mas fuerte

**Lema 1.4.28.** Sean  $l, n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\text{Isom}_H(F_n(\mathbb{R}^l), F_1(\mathbb{R}^l)) = \{\text{id}_{F_n(\mathbb{R}^l)}\}.$$

*Demostración.* Sea  $\Phi \in \text{Isom}_H(F_n(\mathbb{R}^l), F_1(\mathbb{R}^l))$  y  $A \in F_n(\mathbb{R}^l)$ . Demostremos que  $\Phi(A) \subset A$ , para esto, precedamos por contradicción, es decir, supongamos que existe  $z \in \Phi(A) - A$ . Por el Lema 1.4.21 tenemos que  $\text{conv}(A)^{(0)} \subset \Phi(A) \subset \text{conv}(A)$ , así que  $z \in \text{conv}(A)$ , el caso en que  $n = 3$  y  $l = 2$  se muestra en la Figura 1.28.

Figura 1.28: Caso para  $F_3(\mathbb{R}^2)$ .

Luego, tenemos que existe  $H$  un hiperplano en  $\mathbb{R}^l$  de dimensión  $l - 1$  que contiene a  $z$  de tal manera que  $A \cap H = \emptyset$  y que para los semiespacios cerrados acotados por  $H$ ,  $C_1, C_2$  tales que  $C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}^l$  se tenga que  $A \cap C_k \neq \emptyset$  para  $k = 1, 2$ , como se muestra en la Figura 1.28 para el caso  $\mathbb{R}^2$  y  $n = 3$ .

Sea  $L$  una recta en  $\mathbb{R}^l$  que contiene a  $z$  de tal manera que sea perpendicular a  $H$ , se tiene que existen  $r \in \mathbb{R}$  lo suficientemente grande y  $x_k \in L \cap \text{Int}_{\mathbb{R}^l} C_k$  con  $k = 1, 2$  de tal manera que  $d(x_1, z) = r = d(x_2, z)$ ,  $A \cap (S_d(x_1, r) \cup S_d(x_2, r)) = \emptyset$  y  $A \subset \overline{B_d(x_1, r)} \cup \overline{B_d(x_2, r)}$ .

Hagamos  $W = \{x_1, x_2\}$ , como  $\text{dist}(z, W) = \min \{d(z, x_1), d(z, x_2)\} = r$ , entonces tenemos que

$$H(\Phi(A), W) \geq \text{dist}(z, W) = r. \quad (1.4)$$

Por otro lado, como  $A \cap S_d(W, r) = \emptyset$ ,  $A \subset \overline{B_d(W, r)}$  y  $W \subset \overline{B_d(A, r)}$ , tenemos que

$$H(W, A) < r. \quad (1.5)$$

Como  $W \in F_2(\mathbb{R}^l)$ , entonces por el Lema 1.4.27  $\Phi(W) = W$ , y junto con (1.4) y (1.5) tenemos

$$r \leq H(\Phi(A), W) = H(\Phi(A), \Phi(W)) = H(A, W) < r.$$

Lo cual es una contradicción, por tanto

$$\Phi(A) \subset A.$$

Como  $\Phi^{-1} \in \text{Isom}_H(F_n(\mathbb{R}^l), F_1(\mathbb{R}^l))$ , entonces tenemos que  $\Phi^{-1}(A) \subset A$ , y entonces aplicándole  $\Phi$  tenemos que  $A = \Phi(\Phi^{-1}(A)) \subset \Phi(A)$ . Por lo que concluimos que  $\Phi(A) = A$ . Por lo tanto el lema se cumple.  $\square$

**Teorema 1.4.29.** *Sea  $l \in \mathbb{N}$  y  $\mathbb{R}^l$  con la métrica usual  $d$ . Entonces*

$$\chi_n : Isom_d(\mathbb{R}^l) \rightarrow Isom_H(F_n(\mathbb{R}^l))$$

*es un isomorfismo para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Tenemos por el Lema 1.4.17,  $\Phi|_{F_1(\mathbb{R}^l)} \in Isom_H(F_1(\mathbb{R}^l))$  y por el Lema 1.4.28,  $Isom_H(F_n(\mathbb{R}^l), F_1(\mathbb{R}^l)) = \{id_{F_n(\mathbb{R}^l)}\}$ , las cuales son las hipótesis del regreso del Lema 1.4.10, por tanto  $\chi_n$  es un isomorfismo.  $\square$



# Capítulo 2

## Retracciones Lipschitz

En este capítulo analizaremos otro aspecto de los productos simétricos a través de las funciones Lipschitz.

**Definición 2.0.1.** Sean  $(X, d_X)$  y  $(Y, d_Y)$  espacios métricos. Una función  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  es Lipschitz si existe un número real  $L > 0$  tal que para cualesquiera  $a, b \in X$ , se satisface que

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq Ld_X(a, b).$$

En tal caso, decimos que  $X$  y  $Y$  son  $L$ -Lipschitz equivalentes, a  $L$  se le llama constante de Lipschitz.

**Proposición 2.0.2.** Si  $f$  es Lipschitz, entonces  $f$  es uniformemente continua.

**Observación 2.0.3.** No toda función continua es Lipschitz.

**Definición 2.0.4.** Un subconjunto  $Y$  de un espacio métrico  $X$  es un retracto Lipschitz de  $X$  si existe una función Lipschitz  $r : X \rightarrow Y$  que fija los puntos de  $Y$ .

Dado un espacio métrico  $X$ , nótese que siempre tenemos que

$$F_1(X) \subset F_2(X) \subset F_3(X) \subset \dots,$$

por lo que L. V. Kovalev en [12, Problem 4.1, p. 806] propone el siguiente problema interesante:

**Problema 2.0.5.** Caracterizar los espacios métricos  $X$  tales que  $F_k(X)$  es un retracto Lipschitz de  $F_n(X)$  cada que  $k < n$ .

En general no existen retracciones  $r : F_n(X) \rightarrow F_k(X)$  (con  $1 \leq k < n$ ), por ejemplo si  $X$  es la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1$ , se sabe que  $F_2(X)$  es homeomorfo a la banda de Moebius, véase [5, p. 887], donde  $F_1(\mathbb{S}^1)$  se puede identificar con su frontera, y no existe una retracción de  $F_2(X)$  en  $F_1(X)$ ; incluso para  $n \geq 3$  no hay retracciones de  $F_n(\mathbb{S}^1)$  en  $F_1(\mathbb{S}^1)$  ni en  $F_2(\mathbb{S}^1)$ .

En forma positiva, L. V. Kovalev en [12] mostró el siguiente teorema

**Teorema 2.0.6.** *Sea  $X$  un subconjunto conexo y no vacío de  $\mathbb{R}$ . Entonces para cualesquiera  $1 \leq k < n$ , existe una retracción Lipschitz  $r : F_n(X) \rightarrow F_k(X)$ .*

Nuestro objetivo es extender, las ideas de L. V. Kovalev, para lo cual comenzamos con algunos lemas básicos. El siguiente lema es fácil de verificar.

**Lema 2.0.7.** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A, B \in F_n(X)$ . Si  $a \in A$  entonces existe  $b \in B$  tal que  $d(a, b) \leq H(A, B)$ .*

Notese que el lema anterior es válido si  $A$  y  $B$  son elementos del hiperespacio de los subconjuntos cerrados no vacíos de  $X$ .

**Definición 2.0.8.** *Sea  $A \in F_n(X)$ . Si  $|A| = n$  definimos  $\delta(A) = \min\{d(a, b) : a, b \in A, a \neq b\}$  en caso contrario  $\delta(A) = 0$ .*

**Lema 2.0.9.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $A, B \in F_n(X)$ , entonces  $|\delta(A) - \delta(B)| \leq 2H(A, B)$*

*Demostración.* Para probar este lema se requieren tres casos:

**Caso I.** Si  $|A| < n$  y  $|B| < n$ , entonces  $|\delta(A) - \delta(B)| = 0 \leq 2H(A, B)$ .

**Caso II.** Si  $|A| = n$  y  $|B| < n$ .

Supongamos que  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$  con  $k < n$  y además

$$2H(A, B) < |\delta(A) - \delta(B)| = \delta(A).$$

Obsérvese que la desigualdad se satisface claramente para el caso particular de las Figura 2.1

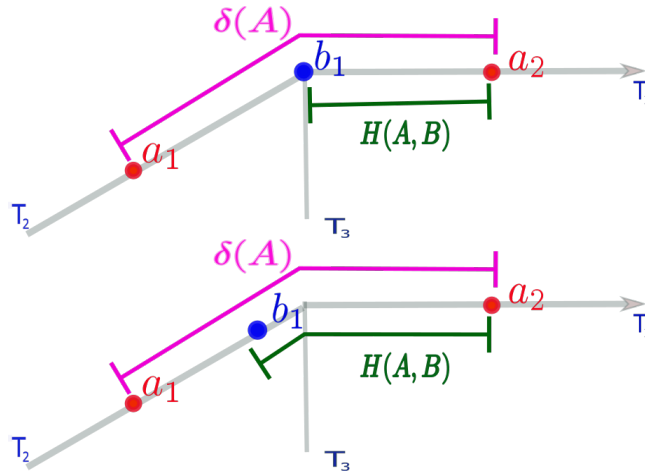


Figura 2.1: Caso particular,  $A \in F_{(2)}(X)$  y  $B \in F_{(1)}(X)$ .

Siguiendo con la demostración por el Lema 2.0.7 tenemos que para cada  $a_i \in A$  existe  $s(i) \in \{1 \dots, k\}$  tal que  $d(a_i, b_{s(i)}) \leq H(A, B) < \frac{1}{2}\delta(A)$ . Observemos que si  $a_i, a_j \in A$  con  $i \neq j$  entonces  $s(i) \neq s(j)$ , pues de lo contrario tendríamos que

$$d(a_i, a_j) \leq d(a_i, b_{s(i)}) + d(b_{s(j)}, a_j) < \delta(A)$$

lo cual no es posible de la definición de  $\delta(A)$ . Esto implica que  $|B| = n$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $|\delta(A) - \delta(B)| \leq 2H(A, B)$ .

**Caso III.** Si  $|A| = n = |B|$ .

Supongamos que  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  y que  $2H(A, B) < |\delta(A) - \delta(B)|$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\delta(A) < \delta(B)$ , entonces

$$H(A, B) < \frac{1}{2}(\delta(B) - \delta(A)) < \frac{1}{2}\delta(B).$$

Si  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\delta(B) - \delta(A)) > 0$  se satisfacen las siguientes dos cosas:

1. Para cada  $k = 1, \dots, n$ ,  $A \cap B_d(b_k, \varepsilon) \neq \emptyset$ .  
En efecto, por el Lema 2.0.7 para cada  $b_k \in B$  existe  $a \in A$  tal que  $d(b_k, a) \leq H(A, B) < \frac{1}{2}(\delta(B) - \delta(A)) = \varepsilon$ . Así  $a \in B_d(b_k, \varepsilon)$ .
2. Para cada  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  con  $i \neq j$ ,  $B_d(b_i, \varepsilon) \cap B_d(b_j, \varepsilon) = \emptyset$ .  
Esto se satisface, pues si suponemos que existe  $p \in B_d(b_i, \varepsilon) \cap B_d(b_j, \varepsilon)$ , entonces  $d(b_i, b_j) \leq d(b_i, p) + d(p, b_j) < 2\varepsilon < \delta(B)$ , esto contradice la definición de  $\delta(B)$ .

Ahora probemos que  $\delta(A)$  no se alcanza para cualesquiera  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Sean  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  y sean  $c_j \in \text{Fr}(\overline{B_d(b_k, \varepsilon)})$  y  $c_k \in \text{Fr}(\overline{B_d(b_j, \varepsilon)})$  tales que

$$d(c_j, c_k) = \min \left\{ d(x, y) : x \in \text{Fr}(\overline{B_d(b_k, \varepsilon)}), y \in \text{Fr}(\overline{B_d(b_j, \varepsilon)}) \right\},$$

entonces

$$d(b_j, b_k) \leq d(b_j, c_j) + d(c_j, c_k) + d(c_k, b_k) = 2\varepsilon + d(c_j, c_k).$$

Así,  $d(c_j, c_k) \geq d(b_j, b_k) + (\delta(A) - \delta(B)) \geq \delta(B) + (\delta(A) - \delta(B)) = \delta(A)$ .

Por otro lado, por 1. y 2., para cada  $a_i \in A$  existe  $s(i) \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $b_{s(i)} \in B$  y  $a_i \in B_d(b_{s(i)}, \varepsilon)$ , en particular  $d(c_{s(j)}, c_{s(k)}) < d(a_j, a_k)$ .

Así  $\delta(A) \leq d(c_{s(j)}, c_{s(k)}) < d(a_j, a_k)$ , para cualesquiera  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ , lo cual es una contradicción.

Con lo que queda demostrado el lema. □

## 2.1. *m-odos simples*

En esta sección probamos que para cualquier *m*-odo simple se satisface que su *k*-ésimo producto simétrico es retracto Lipschitz de su *n*-ésimo producto simétrico para  $k < n$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$ , en esta sección consideramos un *m*-odo simple,  $X$ , definido de la siguiente manera

$$X = \bigcup_{i=1}^m T_i$$

donde  $T_1 = \{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_1 \leq 1\}$  y  $T_k = \{(0, \dots, x_k, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m : -1 \leq x_k < 0\}$  para  $k = 2, \dots, m$ .

Por ejemplo, véase la Figura 2.2 la cual representa un 3-odo simple, comúnmente conocido como triodo simple.

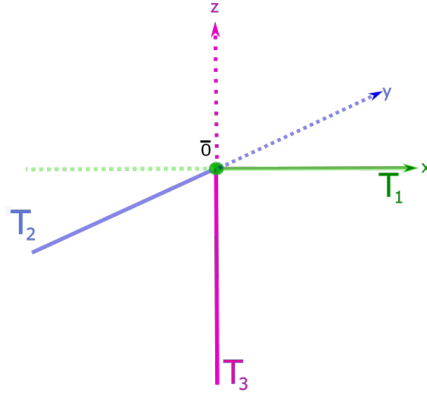


Figura 2.2: Representación para el triodo simple.

Consideramos a  $X$  con la métrica dada por  $d(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|$  para cualesquiera  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in X$ .

Para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  denota la  $i$ -ésima proyección dada por  $\pi_i((x_1, \dots, x_m)) = x_i$ . Dados  $a, b \in T_i$  diremos que  $a \leq b$  si y sólo si  $\pi_i(a) \leq \pi_i(b)$ . Y  $\bar{0}$  denotará el origen en  $\mathbb{R}^m$ .

Dado  $A \in F_n(X)$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ ; supongamos que  $A \cap T_i = \{t_1^i, \dots, t_{r_i}^i\}$  con  $t_{j-1}^i < t_j^i$  para  $j = 2, \dots, r_i$ , como se muestra en la Figura 2.3.

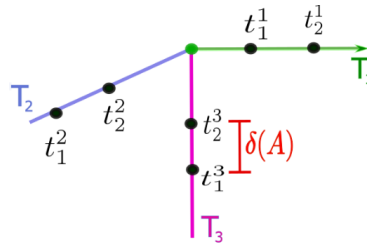


Figura 2.3: Ordenando un conjunto  $A$  para el caso de un triodo simple.

Para cada  $t_j^i$  definimos  $(t_j^i)'$  de la siguiente forma:

- Si  $i = 1$  y  $j \in \{1, \dots, r_1\}$ 

$$(t_j^1)' = \left( \max \left\{ 0, \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right\}, 0, \dots, 0 \right).$$
- Si  $i \neq 1$  y  $j \in \{1, \dots, r_i\}$ ,
$$(t_j^i)' = (0, \dots, \min \{0, \pi_i(t_j^i) + (n - j)\delta(A)\}, \dots, 0).$$

En las Figuras 2.4, 2.5, 2.6, y 2.7 se muestran algunos ejemplos de la asignación de  $(t_j^i)'$  (indicados con flechas), que le corresponden a cada  $(t_j^i)$ .

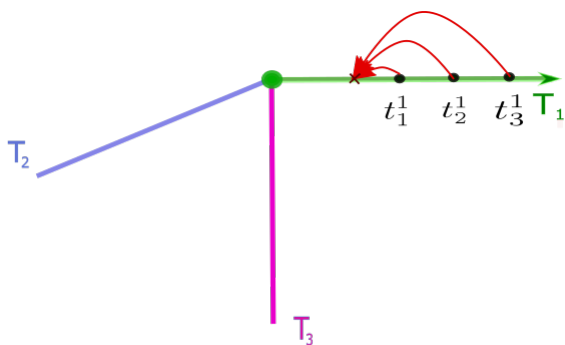


Figura 2.4: Ejemplo de cuando los puntos  $t_j^i$  están en  $T_1$ .

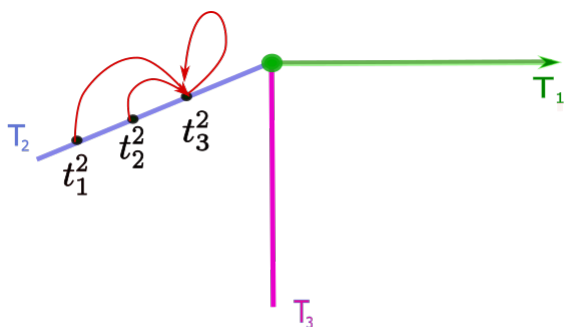


Figura 2.5: Ejemplo de cuando los puntos  $t_j^i$  están en  $T_2$ .

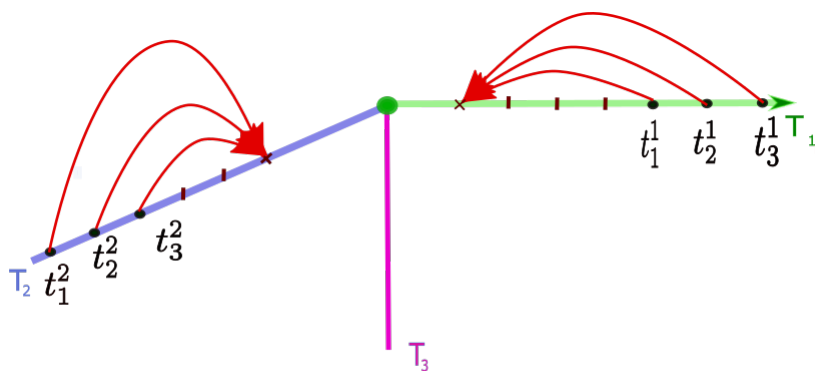


Figura 2.6: Ejemplo de cuando los puntos  $t_j^i$  están en  $T_1$  y  $T_2$ .

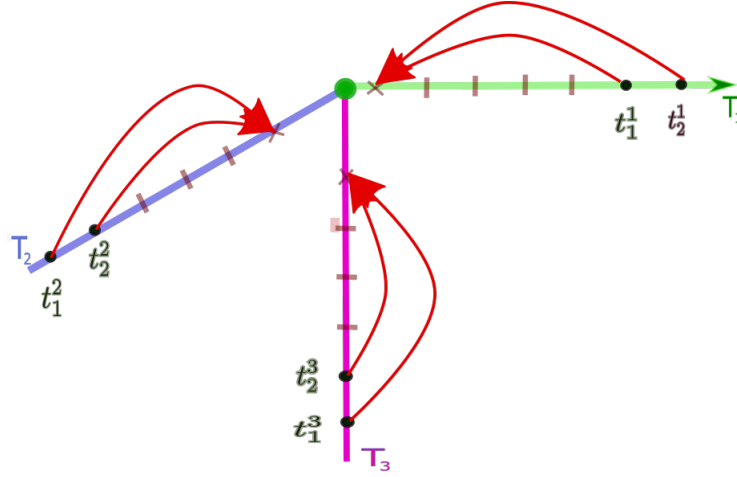


Figura 2.7: Ejemplo de cuando los puntos  $t_j^i$  están en  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ .

**Proposición 2.1.1.** Si  $a \in T_1$ , entonces  $a' \in T_1$  y  $a' \leq a$ .

*Demostración.* Como  $a \in T_1$ , entonces  $a = t_j^1$  para algún  $j \in \{1, \dots, r_1\}$ . Para la primera parte notemos que

$$0 \leq \pi_1(a') = \max \left\{ 0, \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right\} \leq \pi_1(t_j^1) = \pi_1(a) \leq 1,$$

Así  $a' \in T_1$ .

Para la segunda parte, como  $0 \leq \pi_1(a)$  y

$$\pi_1(a) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \leq \pi_1(a),$$

entonces  $\max \left\{ 0, \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right\} \leq \pi_1(a)$ . Por tanto  $a' \leq a$ . □

**Proposición 2.1.2.** Si  $a \in T_i$  para algún  $i \in \{2, \dots, m\}$ , entonces  $a' \in T_i \cup \{\bar{0}\}$  y  $a \leq a'$ .

*Demostración.* Como  $a \in T_i$ , entonces  $a = t_j^i$  para algún  $j = 1, \dots, r_i$ . Así  $-1 \leq \pi_i(t_j^i) < 0$  y dado que  $(n-j)\delta(A) \geq 0$ , se tiene que  $\pi_i(t_j^i) \leq \pi_i(t_j^i) + (n-j)\delta(A)$  y como  $\pi_i(t_j^i) < 0$ , tenemos que

$$-1 \leq \pi_i(t_j^i) \leq \pi_i((t_j^i)') = \min \{0, \pi_i(t_j^i) + (n-j)\delta(A)\} \leq 0,$$

es decir,  $(0, \dots, -1, \dots, 0) \leq a \leq a' \leq \bar{0}$ . Por tanto  $a \leq a'$  y  $a' \in T_i \cup \{\bar{0}\}$ . □

**Proposición 2.1.3.** Si  $t_{j-1}^i, t_j^i \in T_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, m\}$  y para algún  $j \in \{2, \dots, r_i\}$ , entonces  $(t_{j-1}^i)' \leq (t_j^i)'$ .

*Demostración.* Consideremos dos casos

**Caso I.** Si  $i = 1$ , por definición de  $\delta(A)$  tenemos que

$$\pi_1(t_{j-1}^i) + \delta(A) \leq \pi_1(t_j^i)$$

así,

$$\begin{aligned} \pi_1(t_{j-1}^i) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + (j-1) \right) \delta(A) &= \pi_1(t_{j-1}^i) + \delta(A) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \\ &\leq \pi_1(t_j^i) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \pi_1((t_{j-1}^i)') &= \max \left\{ 0, \pi_1(t_{j-1}^i) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + (j-1) \right) \delta(A) \right\} \\ &\leq \max \left\{ 0, \pi_1(t_j^i) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right\} = \pi_1((t_j^i)'). \end{aligned}$$

Por tanto,  $(t_{j-1}^i)' \leq (t_j^i)'$ .

**Caso II.** Si  $i \in \{2, \dots, m\}$ . De la definición de  $\delta(A)$  tenemos que

$$\pi_1(t_{j-1}^i) + \delta(A) \leq \pi_1(t_j^i),$$

entonces

$$\begin{aligned} \pi_1(t_{j-1}^i) + (n-j+1)\delta(A) &= \pi_1(t_{j-1}^i) + \delta(A) + (n-j)\delta(A) \\ &\leq \pi_1(t_j^i) + (n-j)\delta(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(t_{j-1}^i)' \leq (t_j^i)'$ . □

**Proposición 2.1.4.** Si  $c, e \in A$  son tales que  $\delta(A) = d(c, e)$ , entonces  $c' = e'$ .

*Demostración.* Consideremos los siguientes tres casos:

**Caso I.** Si  $c, e \in T_1$  entonces  $c = t_{j-1}^1$  y  $e = t_j^1$  para algún  $j \in \{2, \dots, r_1\}$ . Dado que  $\delta(A) = d(c, e)$ , tenemos que  $\pi_1(t_{j-1}^1) + \delta(A) = \pi_1(t_j^1)$ , así

$$\pi_1(t_{j-1}^1) + \delta(A) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) = \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A)$$

como  $\delta(A) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) = - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + (j-1) \right) \delta(A)$ , tenemos

$$\pi_1(t_{j-1}^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + (j-1) \right) \delta(A) = \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A).$$

Así,

$$\begin{aligned} \pi_1((t_{j-1}^i)') &= \max \left\{ 0, \pi_1(t_{j-1}^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + (j-1) \right) \delta(A) \right\} \\ &= \max \left\{ 0, \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) \right\} = \pi_1((t_j^i)'). \end{aligned}$$

Por tanto,  $c' = (t_{j-1}^i)' = (t_j^i)' = e'$ .

**Caso II.** Si  $c, e \in T_i$  para algún  $i \in \{2, \dots, m\}$ , entonces  $c = t_{j-1}^i$  y  $e = t_j^i$  para algún  $j \in \{2, \dots, r_i\}$ .

Dado que  $\delta(A) = d(c, e)$ , tenemos  $\pi_i(t_{j-1}^i) + \delta(A) = \pi_i(t_j^i)$ , entonces

$$\pi_i(t_{j-1}^i) + \delta(A) + (n-j)\delta(A) = \pi_i(t_j^i) + (n-j)\delta(A).$$

Como  $\delta(A) + (n-j)\delta(A) = (n-j+1)\delta(A)$  tenemos que

$$\pi_i(t_{j-1}^i) + (n-(j-1))\delta(A) = \pi_i(t_j^i) + (n-j)\delta(A).$$

Así,

$$\begin{aligned} \pi_i((t_{j-1}^i)') &= \max \{ 0, \pi_i(t_{j-1}^i) - (n-(j-1))\delta(A) \} \\ &= \max \{ 0, \pi_i(t_j^i) - (n-j)\delta(A) \} = \pi_i((t_j^i)'). \end{aligned}$$

Y en este caso también se concluye que  $c' = (t_{j-1}^i)' = (t_j^i)' = e'$ .

**Caso III.**  $c \in T_u$  y  $e \in T_v$  con  $u \neq v$  y  $u, v \in \{1, \dots, m\}$ .

Consideramos los siguientes dos subcasos:

**Subcaso I.**  $c \in T_1$  o  $e \in T_1$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $c \in T_1$ , entonces  $c = t_j^1$  para algún  $j \in \{1, \dots, r_1\}$ .

Notemos que

$$\delta(A) = d(c, e) = |\pi_1(c) - 0| + |0 - \pi_1(e)|, \quad (2.1)$$

así  $\pi_1(c) - \delta(A) \leq \pi_1(c) - |\pi_1(c) - 0| = 0$ .

Como  $\pi_1(c) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) \leq \pi_1(c) - \delta(A)$ ,

entonces  $\pi_1(c) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) \leq 0$ . Por lo tanto,

$$\max \left\{ 0, \pi_1(c) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) \right\} = 0.$$

Así,  $c' = \bar{0}$ .

**Subcaso II.** Si  $c \in T_i$  o  $e \in T_i$  para algún  $i \in \{2, \dots, m\}$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $c \in T_i$ , entonces  $c = t_j^i$  para algún  $j = 1, \dots, r_i$ . Por (2.1) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_i(e) + |\pi_i(e) - 0| \\ &\leq \pi_i(e) + |\pi_i(e) - 0| + |0 - \pi_i(c)| \\ &= \pi_i(e) + \delta(A) \leq \pi_i(e) + (n - j)\delta(A). \end{aligned}$$

Así,

$$\text{mín} \{0, \pi_i(c) + (n - j)\delta(A)\} = 0$$

es decir  $e' = \bar{0}$ .

Por tanto,  $c' = e'$ . □

**Lema 2.1.5.** Si  $A = \{a_1, \dots, a_m\} \in F_n(X)$  se tiene que

$$\text{máx} \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\} \leq n\delta(A).$$

*Demostración.* Para probar este lema requerimos los siguientes casos:

**Caso I.** Si  $|A| < n$ .

Por definición tenemos que  $\delta(A) = 0$  y que  $a_k = a'_k$  para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

Así,

$$\text{máx} \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\} = 0 \leq n\delta(A).$$

**Caso II.** Si  $|A| = n$ .

Consideramos los siguientes dos subcasos:

- Si  $a_k \in T_1$ , entonces  $a_k = t_j^1$  para algún  $j \in \{1, \dots, r_1\}$  y por la Proposición

2.1.1 tenemos que  $a'_k \leq a_k$ , así, dado que  $\sum_{l=2}^m r_l + j \leq n$

$$\begin{aligned} d(a_k, a'_k) &\leq \left| \pi_1(t_j^1) - \left( \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right) \right| \\ &= \left| \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right| \\ &= \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \\ &\leq n\delta(A). \end{aligned}$$

- Si  $a_k \in T_i$ , para algún  $i \in \{2, \dots, m\}$ , entonces  $a_k = t_j^i$  para algún  $j \in \{1, \dots, r_j\}$ . Así,

$$\begin{aligned} d(a_k, a'_k) &\leq |\pi_i(t_j^i) - (\pi_i(t_j^i) + (n - j)\delta(A))| \\ &= (n - j)\delta(A) \\ &< n\delta(A). \end{aligned}$$

Con lo que queda probado el lema. □

Ahora definamos la función  $r : F_n(X) \longrightarrow F_{n-1}(X)$  dada por:

$$r(A) = \begin{cases} \{a'_1, \dots, a'_n\} & \text{si } |A| = n, \\ A & \text{si } |A| < n. \end{cases} \quad (2.2)$$

Por las proposiciones 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4 tenemos que  $r$  esta bien definida y que  $r(A) \in F_{n-1}(X)$ . A continuación mostraremos una propiedad importante de la función  $r$  y que nos será de gran utilidad para probar el teorema principal de esta sección.

**Lema 2.1.6.** *Si  $A = \{a_1, \dots, a_m\} \in F_n(X)$  se tiene que*

$$H(A, r(A)) \leq \text{máx} \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\}.$$

*Demostración.* Para la prueba de este lema consideramos dos casos:

**Caso I.** Si  $|A| < n$ , por definición tenemos que  $r(A) = A$  y así,

$$H(A, r(A)) = 0 \leq \text{máx} \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\}.$$

**Caso II.** Si  $|A| = n$ .

Como

$$H(A, r(A)) = \text{máx} \left\{ \text{máx}_{a \in A} \text{dist}(a, r(A)), \text{máx}_{a' \in r(A)} \text{dist}(a', A) \right\},$$

solo basta probar las siguientes dos cosas:

i)  $\text{máx}_{a \in A} \text{dist}(a, r(A)) \leq \text{máx} \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\}$ , y

ii)  $\text{máx}_{a' \in r(A)} \text{dist}(a', A) \leq \text{máx} \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\}$ .

Para probar i), dado  $a_j \in A$  con  $j \in \{1, \dots, n\}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \text{dist}(a_j, r(A)) &= \text{mín} \{d(a_j, a'_i) | a'_i \in r(A)\} \\ &\leq d(a_j, a'_j) \\ &\leq \text{máx} \{d(a_k, a'_k) | k = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Análogamente para probar ii), sea  $a'_j \in r(A)$  con  $j \in \{1, \dots, n\}$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \text{dist}(a'_j, A) &= \text{mín} \{d(a'_j, a) | a \in A\} \\ &\leq d(a_j, a'_j) \\ &\leq \text{máx} \{d(a_k, a'_k) | k = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $|A| = n$  se tiene que

$$H(A, r(A)) \leq \text{máx} \{d(a_k, a'_k) | k = 1, \dots, n\}.$$

□

Con los resultados anteriores, estamos en condiciones para probar nuestro primer objetivo, a través del siguiente teorema.

**Teorema 2.1.7.** *Sea  $n \geq 2$ . Si  $X$  es un  $m$ -odo simple, entonces  $F_{n-1}(X)$  es un retracto Lipschitz de  $F_n(X)$ .*

*Demostración.* Basta probar que la retracción  $r$  dada en (2.2) es Lipschitz, para lo cual consideramos dos casos:

**Caso I.**  $A = B$ .

Claramente en este caso se cumple la desigualdad Lipschitz dado que

$$H(r(A), r(B)) = 0 = H(A, B).$$

**Caso II.**  $A \neq B$ .

En este caso consideremos los siguientes dos subcasos:

**Subcaso I.**  $\delta(A) \leq 2H(A, B)$ .

Por el Lema 2.0.9 obtenemos que

$$\begin{aligned} \delta(B) &\leq |\delta(B) - \delta(A)| + \delta(A) \leq 2H(A, B) + \delta(A) \\ &\leq 2H(A, B) + 2H(A, B) = 4H(A, B). \end{aligned}$$

Así, utilizando también los lemas 2.1.5 y 2.1.6 tenemos

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &\leq H(r(A), A) + H(A, B) + H(B, r(B)) \\ &\leq n\delta(A) + H(A, B) + n\delta(B) \\ &\leq 2nH(A, B) + H(A, B) + 4nH(A, B) \\ &= (6n + 1)H(A, B). \end{aligned}$$

**Subcaso II.**  $\delta(A) > 2H(A, B)$ .

Bajo estas circunstancias notemos que  $\delta(B) > 0$ , pues de lo contrario por el Lema 2.0.9 tendríamos que  $\delta(A) = |\delta(A) - \delta(B)| \leq 2H(A, B)$ , lo cual es una contradicción.

Por lo anterior  $|A| = n = |B|$ . Así, supongamos que  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  y sea  $\varepsilon = H(A, B)$ .

**Afirmación a)** Para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$   $B \cap \overline{B_\varepsilon(a_k)} \neq \emptyset$ .

En efecto, por el Lema 2.0.7 tenemos que existe  $b \in B$  tal que  $d(a_k, b) \leq H(A, B)$  y así,  $b \in B \cap \overline{B_\varepsilon(a_k)} \neq \emptyset$ .

**Afirmación b)** Dados  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  con  $k \neq j$ ,  $\overline{B_\varepsilon(a_k)} \cap \overline{B_\varepsilon(a_j)} = \emptyset$ .

En efecto, pues si  $p \in \overline{B_\varepsilon(a_k)} \cap \overline{B_\varepsilon(a_j)}$ , entonces  $d(a_k, p) \leq H(A, B)$  y  $d(a_j, p) \leq H(A, B)$  y así tendríamos que  $2H(A, B) < \delta(A) \leq d(a_k, a_j) \leq d(a_k, p) + d(p, a_j) \leq 2H(A, B)$ . Lo cual no es posible.

Por las afirmaciones a) y b) tenemos que para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$ , existe un único  $s(k)$  tal que  $b_{s(k)} \in \overline{B_\varepsilon(a_k)}$ . Además  $a_k$  y  $b_{s(k)}$  así definidos satisfacen la siguiente afirmación.

**Afirmación c)**  $d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq (2n + 1)H(A, B)$ .

Para la prueba de esta afirmación consideramos los siguientes cuatro casos:

**Caso i)**  $a_k \in T_i$  para algún  $i \in \{2, \dots, m\}$  y  $b_{s(k)} \in T_1$ .

Por las proposiciones 2.1.1 y 2.1.2 tenemos que  $a_k \leq a'_k$  y  $b'_{s(k)} \leq b_{s(k)}$ , así

$d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq d(a_k, b_{s(k)})$  y como  $b_{s(k)} \in B_\varepsilon(a_k)$ , entonces  $d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq d(a_k, b_{s(k)}) \leq H(A, B) < (2n + 1)H(A, B)$ .

**Caso ii)**  $a_k, b_{s(k)} \in T_i$  para algún  $i \in \{2, \dots, m\}$ .

En este caso se tiene que  $a_k = t_j^i$  y  $b_{s(k)} = s_j^i$ . Sean  $p = \pi_i(t_j^i) + (n - j)\delta(A)$  y  $q = \pi_i(s_j^i) + (n - j)\delta(B)$ . Así,  $\pi_i(a'_k) = \min\{0, p\} = \frac{p - |p|}{2}$  y  $\pi_i(b'_{s(k)}) = \min\{0, q\} = \frac{q - |q|}{2}$ . Entonces,

$$d(a'_k, b'_{s(k)}) = \left| \frac{(p - |p|) - (q - |q|)}{2} \right|,$$

así,

$$2d(a'_k, b'_{s(k)}) = \left| (p - q) + (|q| - |p|) \right| \leq |p - q| + ||q| - |p||.$$

Como  $||q| - |p|| \leq |p - q|$ , tenemos que  $2d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq 2|p - q|$ . Así, por el Lema 2.0.9 tenemos que

$$\begin{aligned} d(a'_k, b'_{s(k)}) &\leq |\pi_i(t_j^i) + (n - j)\delta(A) - (\pi_i(s_j^i) + (n - j)\delta(B))| \\ &\leq |\pi_i(t_j^i) - \pi_i(s_j^i)| + (n - j)|\delta(A) - \delta(B)| \\ &\leq H(A, B) + 2nH(A, B) \\ &= (2n + 1)H(A, B). \end{aligned}$$

**Caso iii)**  $a_k, b_{s(k)} \in T_1$ .

En este caso se tiene que  $a_k = t_j^1$  y  $b_{s(k)} = s_j^1$ .

Sean  $p = \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A)$  y  $q = \pi_1(s_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(B)$ .

Así,  $\pi_1(a'_k) = \max\{0, p\} = \frac{p + |p|}{2}$  y  $\pi_1(b'_{s(k)}) = \max\{0, q\} = \frac{q + |q|}{2}$ .

Continuando como en el Caso ii) obtenemos  $d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq (2n + 1)H(A, B)$ .

**Caso iv)**  $a_k \in T_u$  y  $b_{s(k)} \in T_v$  con  $u, v \in \{2, \dots, m\}$  y  $u \neq v$ .

Por la Proposición 2.1.1 tenemos que  $a_k \leq a'_k$  y  $b_{s(k)} \leq b'_{s(k)}$ . Así,

$$d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq d(a_k, b_{s(k)}) \leq H(A, B) < (2n + 1)H(A, B).$$

Con lo que se concluye la prueba de la Afirmación c).

Ahora recordemos que

$$H(r(A), r(B)) = \max \left\{ \max_{a' \in r(A)} \text{dist}(a', r(B)), \max_{b' \in r(B)} \text{dist}(b', r(A)) \right\}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$H(r(A), r(B)) = \max_{a' \in r(A)} \text{dist}(a', r(B)).$$

Entonces, para algún  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &= \text{dist}(a'_j, r(B)) \\ &\leq d(a'_j, b'_{s(j)}) \\ &\leq \max_k d(a'_k, b'_{s(k)}) \\ &\leq (2n + 1)H(A, B) \\ &< (6n + 1)H(A, B). \end{aligned}$$

Por tanto, en cualquier caso tenemos que

$$H(r(A), r(B)) \leq (6n + 1)H(A, B).$$

Es decir,  $r$  es  $(6n + 1)$ -Lipschitz. □

Por [14, Proposición 2.1.3, p. 10], tenemos el siguiente corolario

**Corolario 2.1.8.** Sean  $n \geq 2$ . Si  $X$  es un  $m$ -odo simple, entonces para toda  $k < n$  se tiene que  $F_k(X)$  es un retracto  $L$ -Lipschitz de  $F_n(X)$ , donde  $L = (6n + 1)(6(n - 1) + 1) \cdots (6(k + 1) + 1)$ .

## 2.2. Árboles

En esta sección vamos a considerar  $X$  un árbol, asumiendo que la métrica  $d$  en  $X$  es la métrica de longitud de arco y supongamos que cada arista  $e_i$  de  $X$  tiene longitud uno.

**Observación 2.2.1.** Sean  $a, b, c \in X$ . Se tiene que  $c \in \overrightarrow{ab}$  si y sólo si  $d(a, b) = d(a, c) + d(c, b)$ .

**Proposición 2.2.2.** Sean  $a, b, v \in X$  y  $0 \leq \lambda \leq d(b, v)$ . Si  $b \in \overrightarrow{av}$  entonces  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) = d(a, b)$ .

*Demostración.* Notemos que  $b_\lambda^v \in \overrightarrow{bv}$ , mientras que  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{ab}$  ( $b \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ ) ó  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{bb_\lambda^v}$ . Así, los siguientes dos casos:

**Caso I.**  $b \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ . (Véase Figura 2.8).

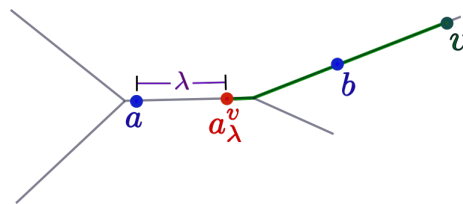


Figura 2.8:  $b \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ .

Por la Observación 2.2.1

$$d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) = d(a_\lambda^v, b) + d(b, b_\lambda^v) = d(a, b) - \lambda + \lambda = d(a, b).$$

**Caso II.**  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{bb_\lambda^v}$ . (Véase Figura 2.9).

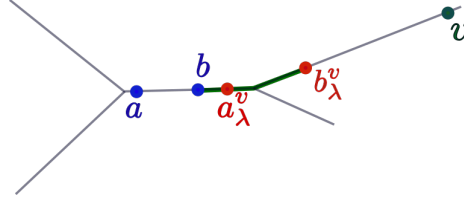


Figura 2.9:  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{bb_\lambda^v}$ .

Como  $d(a, b_\lambda^v) = d(a, b) + \lambda$ , entonces

$$d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) = d(a, b_\lambda^v) - d(a, a_\lambda^v) = d(a, b) - \lambda = d(a, b).$$

□

**Proposición 2.2.3.** Sean  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq d(a, v)$  y  $0 \leq \kappa \leq d(b, v)$ . Si  $b \in \overrightarrow{av}$ , entonces  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|$ .

*Demostración.* Obsérvese que si  $\lambda = \kappa$ , entonces por la Proposición 2.2.2 se da la igualdad. Ahora si  $\lambda \neq \kappa$ , notemos que  $b_\kappa^v \in \overrightarrow{bv}$ , mientras que  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{ab}$  ( $b \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ ) ó  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{bv}$ . Así, consideremos los dos casos:

**Caso I.**  $b \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ .

Por la Observación 2.2.1,

$$d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) = d(a_\lambda^v, b) + d(b, b_\kappa^v) = d(a, b) - \lambda + \kappa \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|.$$

**Caso II.**  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{bv}$ .

i) Si  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{b_\kappa^v v}$ , entonces

$$d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) = d(a_\lambda^v, a) - d(a, b) - d(b, b_\kappa^v) = -d(a, b) + \lambda - \kappa \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|.$$

ii) Si  $b_\kappa^v \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ , entonces

$$d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) = d(a, b_\kappa^v) - d(a, a_\lambda^v) = d(a, b) + d(b, b_\kappa^v) - d(a, a_\lambda^v) \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|.$$

□

**Proposición 2.2.4.** Sean  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq d(a, v)$  y  $0 \leq \kappa \leq d(b, v)$ . Si  $v \in \overrightarrow{ab}$ , entonces  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) \leq d(a, b)$ .

*Demostración.* Tal situación se puede visualizar en la Figura 2.10.

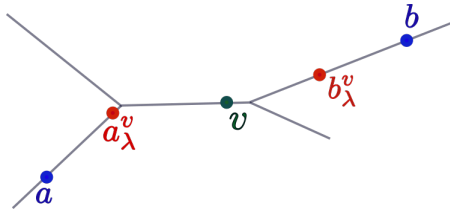


Figura 2.10: Condiciones de la proposición.

Por la Observación 2.2.1

$$d(a, b) = d(a, a_\lambda^v) + d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) + d(b_\kappa^v, b) = \lambda + d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) + \kappa.$$

Así,

$$d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) = d(a, b) - (\lambda + \kappa) \leq d(a, b).$$

□

**Proposición 2.2.5.** Sean  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq \min \{d(a, v), d(b, v)\}$ . Si  $a \notin \vec{bv}$  y  $b \notin \vec{av}$ , entonces  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) \leq d(a, b)$ .

*Demostración.* Obsérvese que si  $\lambda = 0$  entonces se da la igualdad. Supongamos que  $\lambda > 0$ , sea  $z \in \vec{av} \cap \vec{bv}$  tal que si  $w \in \vec{av} \cap \vec{bv}$  entonces  $\vec{wb} \subset \vec{zv}$ . Consideremos los siguientes tres casos:

**Caso I.**  $a_\lambda^v \in \vec{bv}$  y  $b_\lambda^v \in \vec{av}$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $d(a, z) \leq d(b, z)$ . Sea  $a' \in \vec{bv}$  tal que  $a_\lambda^v = a'_\lambda^v$ . Como se muestra en Figura 2.11.

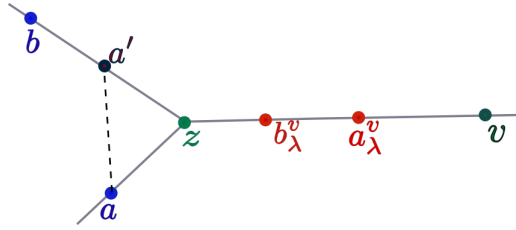


Figura 2.11:  $a_\lambda^v \in \vec{bv}$  y  $b_\lambda^v \in \vec{av}$ .

Notemos que  $d(a', b) < d(a, b)$ , así por la Proposición 2.2.2  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) = d(a', v) < d(a, b)$ .

**Caso II.**  $a_\lambda^v \in \vec{bv}$  y  $b_\lambda^v \notin \vec{av}$ .

La justificación en este caso es análoga a la del Caso I.

**Caso III.**  $a_\lambda^v \notin \vec{bv}$  y  $b_\lambda^v \notin \vec{av}$ .

En este caso notemos que  $a_\lambda^v = a_\lambda^z$  y  $b_\lambda^v = b_\lambda^z$ , así por la Proposición 2.2.4,  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) \leq d(a, b)$ . □

La prueba de los casos que se consideran en la demostración de la siguiente proposición es análoga a los que aparecen en la prueba de la proposición anterior.

**Proposición 2.2.6.** Sean  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq d(a, v)$  y  $0 \leq \kappa \leq d(b, v)$ . Si  $a \notin \vec{bv}$  y  $b \notin \vec{av}$ , entonces  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|$ .

Por las proposiciones anteriores obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.7.** Si  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq d(a, v)$  y  $0 \leq \kappa \leq d(b, v)$ , entonces  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|$ .

**Teorema 2.2.8.** *Sea  $X$  un árbol. Entonces la función  $r : F_2(X) \rightarrow F_1(X)$ , dada por  $r(A) = \{PM(A)\}$  es 4-Lipschitz.*

*Demostración.* Sean  $A, B \in F_2(X)$ . Notemos que  $H(A, r(A)) = \frac{\delta(A)}{2}$ . Para la prueba de este teorema consideramos tres casos:

**Caso I.** Si  $|A| = 1 = |B|$ , entonces se cumple que  $H(r(A), r(B)) = H(A, B)$ .

**Caso II.** Si  $|A| = 2$  y  $|B| = 1$ . Notemos que en este caso  $\frac{\delta(A)}{2} \leq H(A, B)$ , así,

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &= H(r(A), B) \leq H(r(A), A) + H(A, B) \\ &\leq \frac{\delta(A)}{2} + H(A, B) \leq 2H(A, B). \end{aligned}$$

**Caso III.** Si  $|A| = 2 = |B|$ . Consideremos los siguientes dos subcasos:

**Subcaso a.**  $H(A, B) \geq \frac{\delta(A)}{2}$ .

En este caso se cumple que

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &\leq H(r(A), A) + H(A, B) + H(B, r(B)) \\ &= \frac{\delta(A)}{2} + H(A, B) + \frac{\delta(B)}{2}. \end{aligned}$$

Ahora consideremos las siguientes dos situaciones:

i) Si  $\delta(B) \leq \delta(A)$ , se tiene que

$$H(r(A), r(B)) \leq H(A, B) + \delta(A) \leq H(A, B) + 2H(A, B) = 3H(A, B)$$

ii) Si  $\delta(B) > \delta(A)$ , entonces por el Lema 2.0.9 obtenemos

$$\delta(B) \leq 2H(A, B) + \delta(A) \leq 4H(A, B),$$

y así,

$$H(r(A), r(B)) \leq \frac{\delta(A)}{2} + H(A, B) + \frac{\delta(B)}{2} \leq 4H(A, B).$$

**Subcaso b.**  $H(A, B) < \frac{\delta(A)}{2}$ .

Sean  $A = \{a, c\}$  y  $B = \{b, d\}$ , supongamos que  $H(A, B) = d(a, b)$ , entonces por el Corolario 2.2.7 y el Lema 2.0.9, obtenemos

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &= d(PM(A), PM(B)) = d(a_{\frac{\delta(A)}{2}}^c, b_{\frac{\delta(B)}{2}}^c) \\ &\leq d(a, b) + \left| \frac{\delta(A)}{2} - \frac{\delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $r$  es una retracción 4-Lipschitz. □

Ahora probaremos que  $F_2(X)$  es un retracto Lipschitz de  $F_3(X)$ , para lo cual requerimos de los siguientes resultados.

**Proposición 2.2.9.** *Sean  $a, b, d, e \in X$ . Si  $d(a, d) < \frac{d(a, b)}{2}$  y  $d(b, e) < \frac{d(a, b)}{2}$ , entonces  $PM(\{d, e\}) \in \overrightarrow{ab}$ .*

*Demostración.* Para la prueba de esta proposición consideramos tres casos:

**Caso I.**  $d, e \in \vec{ab}$ .

Si esto pasa entonces  $PM(\{d, e\}) \in \vec{de} \subset \vec{ab}$ . Como se muestra en la Figura 2.12.

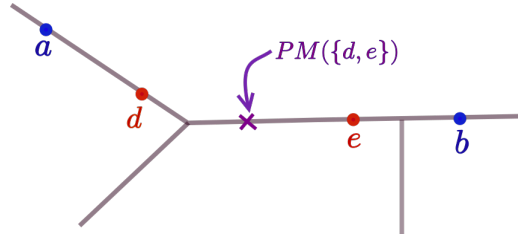


Figura 2.12:  $d, e \in \vec{ab}$ .

**Caso II.**  $d \in \vec{ab}$  pero  $e \notin \vec{ab}$ , ó  $e \in \vec{ab}$  pero  $d \notin \vec{ab}$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $d \in \vec{ab}$  pero  $e \notin \vec{ab}$ . En esta situación consideramos los siguientes dos subcasos:

**Subcaso a.**  $\vec{ab} \subset \vec{ae}$ . (Véase Figura 2.13).

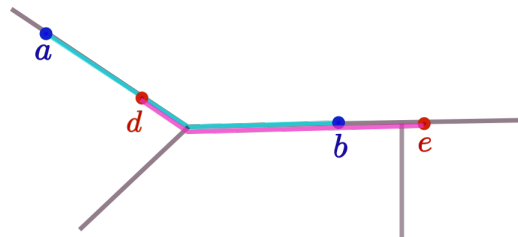


Figura 2.13:  $\vec{ab} \subset \vec{ae}$ .

Notemos que  $PM(\{d, b\}) \in \vec{ab}$  y como  $d(b, e) < d(b, d)$  entonces  $PM(\{d, e\}) = PM(\{d, b\})_{d(b, e)}^e \in \vec{ab}$ .

**Subcaso b.**  $\vec{ab} \not\subset \vec{ae}$ . En este subcaso tenemos que existe  $t \in \vec{ab}$  tal que  $d(b, e) = d(b, t) + d(t, e)$ . Como se muestra en la Figura 2.14.

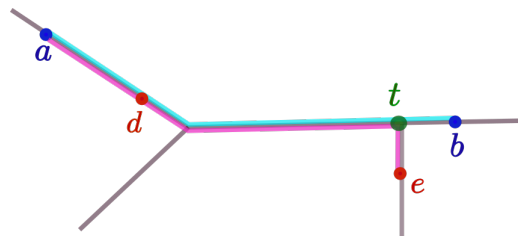


Figura 2.14:  $\vec{ab} \not\subset \vec{ae}$ .

Dado que  $d(a, b) = d(a, d) + d(d, t) + d(t, b)$  y  $d(b, e) = d(b, t) + d(t, e)$ , entonces  $d(d, t) - d(t, e) = d(a, b) - d(a, d) - d(b, e) > 0$  y así se tiene que  $d(d, t) > d(t, e)$ .

Como  $d, t \in \vec{ab}$ , entonces  $PM(\{d, e\}) = PM(\{d, t\})_{\frac{d(t,e)}{2}}^e \in \vec{at} \subset \vec{ab}$ .

**Caso III.**  $d, e \notin \vec{ab}$ . Consideremos los siguientes dos subcasos:

**Subcaso a.**  $\vec{ab} \subset \vec{de}$ . (Véase Figura 2.15).

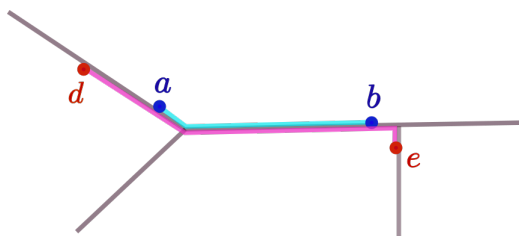


Figura 2.15:  $\vec{ab} \subset \vec{de}$ .

Por Caso II.  $PM(\{d, b\}) \in \vec{ab}$  y  $d(e, b) < d(a, b) \leq d(d, b)$ , entonces

$$PM(\{d, e\}) = PM(\{d, b\})_{\frac{d(b,e)}{2}}^e \in \vec{ab}.$$

**Subcaso b.**  $\vec{ab} \not\subset \vec{de}$ . Sean  $s, t$  tales que

$$d(a, d) = d(a, s) + d(s, d) \text{ y } d(b, e) = d(b, t) + d(t, e).$$

i)  $\vec{st} \subset \vec{ab}$ . (Véase Figura 2.16).

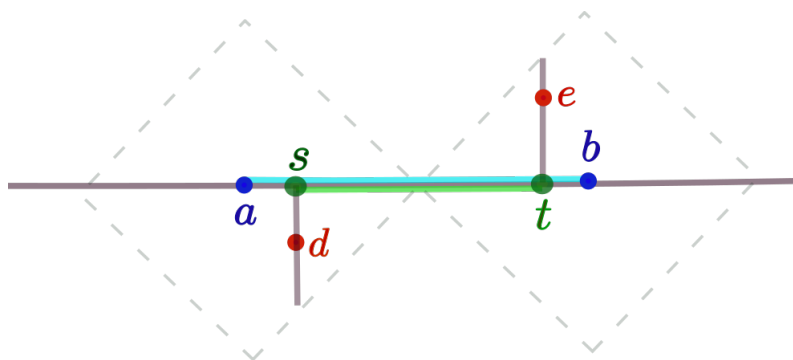


Figura 2.16:  $\vec{st} \subset \vec{ab}$ .

Como  $\vec{st} \subset \vec{de}$ , aplicando el Subcaso a.  $PM(\{d, e\}) \in \vec{st} \subset \vec{ab}$ .

ii)  $\vec{st} \not\subset \vec{ab}$  y  $\vec{ab} \not\subset \vec{st}$ . Como se muestra en la Figura 2.17.

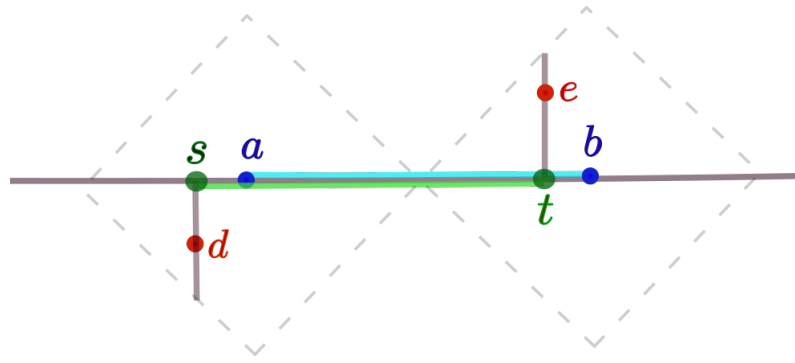


Figura 2.17:  $\vec{st} \not\subset \vec{ab}$  y  $\vec{ab} \not\subset \vec{st}$ .

En esta situación tenemos que  $t \in \vec{ab}$  o  $s \in \vec{ab}$ , sin pérdida de generalidad supongamos que  $t \in \vec{ab}$ . Aplicando el Caso II. tenemos que  $PM(\{d, t\}) \in \vec{at}$  y como  $d(t, e) < d(t, d)$  entonces  $PM(\{d, e\}) = PM(\{d, t\})_{\frac{d(t,e)}{2}} \in \vec{at} \subset \vec{ab}$ .  $\square$

**Proposición 2.2.10.** Sean  $x, y, z \in X$  tres puntos distintos. Entonces  $|\vec{xy} \cap \vec{yz} \cap \vec{xz}| = 1$ .

*Demostración.* Como  $X$  no tiene curvas cerradas simples tenemos que se cumplen las siguientes dos cosas:

1.  $\vec{xy} \cap \vec{xz}$  es  $\{x\}$  ó es un arco contenido en  $\vec{xy}$ , y
2.  $\vec{xy} \cap \vec{zy}$  es  $\{y\}$  ó es un arco contenido en  $\vec{xy}$ .

Notemos que  $\vec{xy} \cap \vec{xz} = \{x\}$  y  $\vec{xy} \cap \vec{zy} = \{y\}$  no se puede dar pues de lo contrario tendríamos una curva cerrada simple.

- Si  $\vec{xy} \cap \vec{xz} = \{x\}$  y  $\vec{xy} \cap \vec{zy}$  es un arco contenido en  $\vec{xy}$  entonces  $\vec{xy} \cap \vec{yz} \cap \vec{xz} = \{x\}$ .
- Si  $\vec{xy} \cap \vec{xz}$  es un arco contenido en  $\vec{xy}$  y  $\vec{xy} \cap \vec{zy} = \{y\}$  entonces  $\vec{xy} \cap \vec{yz} \cap \vec{xz} = \{y\}$ .
- Si  $\vec{xy} \cap \vec{xz}$  es un arco contenido en  $\vec{xy}$ , digamos  $\vec{vx}$ , y  $\vec{xy} \cap \vec{zy}$  es un arco contenido en  $\vec{xy}$ , digamos  $\vec{wy}$ . Como  $X$  no tiene curvas cerradas simples entonces  $v = w$  y se tiene que  $\vec{xy} \cap \vec{yz} \cap \vec{xz} = \{v\}$ .

$\square$

**Proposición 2.2.11.** Sean  $x, y, z \in X$  tres puntos distintos. Si  $d(x, y) \leq d(x, z)$  y  $d(x, y) \leq d(y, z)$ , entonces  $z_{\frac{d(x,y)}{2}}^{PM(\{x,y\})} \in \vec{z\bar{v}}$ , donde  $v$  es el punto que garantiza la proposición anterior.

*Demostración.* Sea  $z' = z_{\frac{d(x,y)}{2}}^{PM(\{x,y\})}$ . Para la prueba de esta proposición consideremos los siguientes dos casos:

**Caso I.**  $v = x$  ó  $v = y$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $v = x$ . Notemos que  $z \notin \overrightarrow{xy}$  y como  $d(z, z') < d(z, x) < d(z, PM(\{x, y\}))$ , entonces  $z' \in \overrightarrow{zx}$ .

**Caso II.** Si  $v \neq x$  y  $v \neq y$ .

En este caso notemos que

$$d(z, z') = \frac{d(x, y)}{2} \leq \max \{d(x, v), d(v, y)\} \leq d(v, z),$$

y por tanto  $z' \in \overrightarrow{zv}$ . □

**Teorema 2.2.12.** Sean  $X$  un árbol y  $r : F_3(X) \rightarrow F_2(X)$  dada por

$$r(A) = \begin{cases} \left\{ PM(\{a, b\}), c_{\frac{\delta(A)}{2}}^{PM(\{a,b\})} \right\} & \text{si } |A| = 3, \\ A & \text{si } |A| < 3, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $A = \{a, b, c\}$  y  $a, b$  son tales que  $\delta(A) = d(a, b)$ . Como se muestra en la Figura 2.18.

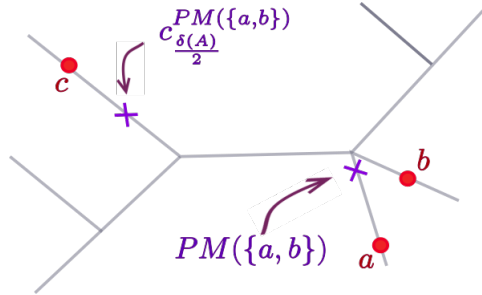


Figura 2.18: Retracción  $r$ .

Entonces  $r$  es 4-Lipschitz.

*Demostración.* Sean  $A, B \in F_3(X)$ . Notemos que  $H(A, r(A)) = \frac{\delta(A)}{2}$ . Consideremos los siguientes tres casos:

**Caso I.** Si  $|A| < 3$  y  $|B| < 3$ , entonces  $H(r(A), r(B)) = H(A, B)$ .

**Caso II.** Si  $|A| = 3$  y  $|B| < 3$ , notemos que  $\frac{\delta(A)}{2} \leq H(A, B)$ , entonces  $H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B)$ , cuya prueba es idéntica al Caso II. del Teorema 2.2.8.

**Caso III.** Si  $|A| = 3 = |B|$ . Consideremos los siguientes dos subcasos:

**Subcaso a.** Si  $H(A, B) \geq \frac{\delta(A)}{2}$ , entonces  $H(r(A), r(B)) \leq 4H(A, B)$ , la prueba es idéntica a la del Subcaso a. del Caso III. del Teorema 2.2.8.

**Subcaso b.**  $H(A, B) < \frac{\delta(A)}{2}$ . Supongamos que  $B = \{g, e, f\}$  tal que  $d(a, g) < \frac{\delta(A)}{2}$ ,  $d(b, e) < \frac{\delta(A)}{2}$  y  $d(c, f) < \frac{\delta(A)}{2}$ . Notemos que

$$H(A, B) = \text{máx} \{d(a, g), d(b, e), d(c, f)\}. \quad (2.4)$$

De aquí tenemos tres situaciones,  $\delta(B) = d(g, e)$ ,  $\delta(B) = d(e, f)$  ó  $\delta(B) = d(g, f)$ .

1. Si  $\delta(B) = d(g, e)$ . Sean  $c' = c_{\frac{\delta(A)}{2}}^{PM(\{a, b\})}$  y  $f' = f_{\frac{\delta(B)}{2}}^{PM(\{g, e\})}$ . Observese que en esta situación

$$H(r(A), r(B)) \leq \text{máx} \{d(PM(\{a, b\}), PM(\{g, e\})), d(c', f')\}. \quad (2.5)$$

Por un lado, por la Proposición 2.2.9 tenemos que  $PM(\{g, e\}) \in \overrightarrow{ab}$  y así,

$$d(PM(\{a, b\}), PM(\{g, e\})) = d\left(a_{\frac{\delta(A)}{2}}^b, g_{\frac{\delta(B)}{2}}^b\right),$$

luego por (2.4), el Corolario 2.2.7 y el Lema 2.0.9 tenemos que

$$d(PM(\{a, b\}), PM(\{g, e\})) \leq d(a, g) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (2.6)$$

Ahora probaremos que  $d(c', f') \leq 2H(A, B)$ , para tal efecto consideramos las siguientes dos situaciones:

- a)  $\overrightarrow{ab} \subset \overrightarrow{ae}$  ó  $\overrightarrow{ab} \subset \overrightarrow{bc}$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que pasa lo primero, entonces por el Corolario 2.2.7, (2.4) y el Lema 2.0.9, tenemos que

$$d(c', f') = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^a, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^a) \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (2.7)$$

- b)  $\overrightarrow{ab} \not\subset \overrightarrow{ae}$  y  $\overrightarrow{ab} \not\subset \overrightarrow{bc}$ .

Sea  $v = \overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{bc} \cap \overrightarrow{ae}$ . Como  $PM(\{a, b\}), PM(\{g, e\}) \in \overrightarrow{ab}$ , entonces tenemos las siguientes dos opciones:

- i)  $PM(\{a, b\}), PM(\{g, e\}) \in \overrightarrow{va}$  ó  $PM(\{a, b\}), PM(\{g, e\}) \in \overrightarrow{vb}$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos lo primero, entonces

$$d(c', f') = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^a, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^a), \text{ luego por el Corolario 2.2.7, (2.4) y el}$$

Lema 2.0.9 se tiene que

$$d(c', f') \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (2.8)$$

- ii)  $PM(\{a, b\}) \in \overrightarrow{av}$  y  $PM(\{g, e\}) \in \overrightarrow{vb}$  ó  $(PM(\{a, b\}) \in \overrightarrow{vb}$  y  $PM(\{g, e\}) \in \overrightarrow{av})$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos lo primero. Notemos que en esta situación  $v \in \overrightarrow{be}$ . Así, por la Proposición 2.2.11 tenemos

que  $c' \in \overrightarrow{c\bar{v}}$  y  $f' \in \overrightarrow{f\bar{v}}$ , lo que implica que  $d(c', f') = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^v, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^v)$ . Por el Corolario 2.2.7, (2.4) y el Lema 2.0.9, se tiene que

$$d(c', f') \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (2.9)$$

Por lo tanto, (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9) implican en esta situación que  $H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B)$ .

2. Si  $\delta(B) = d(e, f)$ . Sean  $g' = g_{\frac{\delta(B)}{2}}^{PM(\{e, f\})}$  y  $c'$  como en la situación anterior. Obsérvese que en esta situación

$$H(r(A), r(B)) \leq \max \{d(PM(\{a, b\}), g'), d(c', PM(\{e, f\}))\}. \quad (2.10)$$

Por la Proposición 2.2.9 tenemos que  $PM(\{e, f\}) \in \overrightarrow{bc}$ . Consideremos las siguientes dos posibilidades:

- a)  $\overrightarrow{ab} \subset \overrightarrow{ac}$  ó  $\overrightarrow{ab} \subset \overrightarrow{bc}$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que pasa lo primero. Dado que  $PM(\{e, f\}) \in \overrightarrow{bc}$  obtenemos que  $d(g', PM(\{a, b\})) = d(g_{\frac{\delta(B)}{2}}^c, a_{\frac{\delta(A)}{2}}^c)$ .

Utilizando el Corolario 2.2.7, (2.4) y el Lema 2.0.9 se tiene que

$$d(g', PM(\{a, b\})) \leq d(a, b) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (2.11)$$

Por otro lado, como  $c' \in \overrightarrow{cb}$  y  $PM(\{e, f\}) \in \overrightarrow{bc}$ , entonces

$d(c', PM(\{e, f\})) = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^b, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^b)$  y por el Corolario 2.2.7, (2.4) y el Lema 2.0.9 tenemos que

$$d(c', PM(\{e, f\})) \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (2.12)$$

- b)  $\overrightarrow{ab} \not\subset \overrightarrow{ac}$  y  $\overrightarrow{ab} \not\subset \overrightarrow{bc}$ .

Sea  $v = \overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{bc} \cap \overrightarrow{ac}$ . Por la Proposición 2.2.11 tenemos que  $c' \in \overrightarrow{cb}$  y como  $PM(\{e, f\}) \in \overrightarrow{bc}$ , entonces  $PM(\{e, f\}) \in \overrightarrow{cb}$  ó  $PM(\{e, f\}) \in \overrightarrow{vb}$ . Así, en cualquier caso  $d(c', PM(\{e, f\})) = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^b, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^b)$ , y por el Corolario 2.2.7, (2.4) el Lema 2.0.9 se tiene que

$$d(c', PM(\{e, f\})) \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (2.13)$$

Por otro lado, como  $PM(\{a, b\}) \in \overrightarrow{ab}$ ,  $PM(\{e, f\}) \in \overrightarrow{cb}$ , entonces tenemos las siguientes opciones:

- 1)  $PM(\{a, b\}) \in \overrightarrow{va}$  y  $PM(\{e, f\}) \in \overrightarrow{vb}$ .

- 2)  $PM(\{a, b\}) \in \vec{va}$  y  $PM(\{e, f\}) \in \vec{vb}$ .
- 3)  $PM(\{a, b\}) \in \vec{vb}$  y  $PM(\{e, f\}) \in \vec{vc}$ .
- 4)  $PM(\{a, b\}) \in \vec{vb}$  y  $PM(\{e, f\}) \in \vec{vb}$ .

Notemos que  $d(PM(\{a, b\}), g') = d(a_{\frac{\delta(A)}{2}}^b, d_{\frac{\delta(B)}{2}}^b)$  en las cuatro opciones.

Así, usando el Corolario 2.2.7, (2.4) y el Lema 2.0.9 tenemos que

$$d(PM(\{a, b\}), g') \leq d(a, b) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (2.14)$$

Por lo tanto, (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) y (2.14) implican en esta situación que  $H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B)$ .

3. Si  $\delta(B) = d(g, f)$ . Observemos que en esta situación solo se cumple que  $\vec{ab} \not\subset \vec{ac}$  y  $\vec{ab} \not\subset \vec{bc}$ , en donde se satisface que  $H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B)$ , cuya prueba es análoga a la de la posibilidad (b) de 2.

Por lo anterior para el Subcaso b. obtenemos que  $H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B)$ . Concluyendo así la demostración del teorema.  $\square$

**Corolario 2.2.13.** *Si  $X$  es un árbol, entonces  $F_1(X)$  es un retracto 16-Lipschitz de  $F_3(X)$ .*



# Resultados

Tras la metodología utilizada en esta tesis se destacan los siguientes resultados ya conocidos:

- Se logro comprender la idea geométrica de la prueba de que  $F_2(I^2)$  es homeomorfo a  $I^4$  pero que para  $n \geq 3$ ,  $F_n(I^2)$  no es homeomorfo a ningún subconjunto de  $\mathbb{R}^{2n}$  y  $F_2(I^n)$  tampoco.
- Se demostró que todas las isometrías definidas en  $F_m(\mathbb{R}^n)$  vienen inducidas de isometrías en  $\mathbb{R}^n$ .

Y los resultados originales que obtuvimos a lo largo del desarrollo de este trabajo son:

- Se demostró que  $F_{n-1}(X)$  es un retracto  $(6n + 1)$ -Lipschitz de  $F_n(X)$  para  $X$  un  $m$ -odo simple.
- Se probó que si  $X$  es un árbol entonces  $F_{n-1}(X)$  es un retracto 4-Lipschitz de  $F_n(X)$  para  $n \leq 3$ .

Y como consecuencia los siguientes:

**Corolario 2.2.14.** Sean  $n \geq 2$ . Si  $X$  es un  $m$ -odo simple, entonces para toda  $k < n$  se tiene que  $F_k(X)$  es un retracto  $L$ -Lipschitz de  $F_n(X)$ , donde  $L = (6n + 1)(6(n - 1) + 1) \cdots (6(k + 1) + 1)$ .

**Corolario 2.2.15.** Si  $X$  es un árbol, entonces  $F_1(X)$  es un retracto 16-Lipschitz de  $F_3(X)$ .



# Discusión

Después de probar que para  $X$  un  $m$ -odo,  $F_{n-1}(X)$  es un retracto Lipschitz de  $F_n(X)$ , aún quedan muchos problemas pendientes por contestar, como los siguientes:

**Problema 2.2.16.** *Mejorar la constante de Lipschitz de los teoremas 2.1.7, 2.2.8 y 2.2.12, así como también de los corolarios 2.2.14 y 2.2.15.*

**Problema 2.2.17.** *Con relación al Teorema 2.1.7, encontrar una constante de Lipschitz que no dependa de  $n$ .*

**Problema 2.2.18.** *¿Existen retracciones Lipschitz de  $F_n(X)$  en  $F_k(X)$ , para  $X$  un árbol y  $n \geq 4$ ?*

Y con respecto al Teorema 1.4.29, tenemos el siguiente

**Problema 2.2.19.** *Sea  $l, n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ . ¿Es  $\chi_n : (Isom_d(X), \circ) \rightarrow (Isom_H(F_n(X)), \circ)$  un isomorfismo cuando  $X$  es un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^l$ ?*



# Conclusiones

Nuestro objetivo principal fue estudiar los productos simétricos de espacios euclidianos desde el punto de vista de la Teoría de funciones geométricas y sus encajes bi-Lipschitz, el cual consideramos se cumplió. Mas específicamente pudimos comprender la geometría que hay detras de los resultados clásicos probados en [15], por R. Moslki. También aprendimos que la geometría de  $F_n(\mathbb{R}^l)$  es muy parecida a la de  $\mathbb{R}^l$  tanto que todas las isometrías definidas en  $F_n(\mathbb{R}^l)$  vienen inducidas de isometrías en  $\mathbb{R}^l$ , con  $l, n \in \mathbb{N}$ . Además se logró demostrar que  $F_{n-1}(X)$  es un retracto Lipschitz de  $F_n(X)$  para  $X$  un  $m$ -odo simple. Para  $X$  un árbol, no dimos una respuesta tan general como para los  $m$ -odos, pero obtuvimos que  $F_{n-1}(X)$  es un retracto Lipschitz de  $F_n(X)$  cuando  $n \leq 3$ .



# Bibliografía

- [1] R. N. Andersen, M. M. Marjanovic and R. M. Schori, *Symmetric products and higher dimensional dunce hats*, Topology Proc. **18** (1993), 7 - 17.
- [2] M. Bacák and L. V. Kovalev, *Lipschitz Retractions in Hadamard Spaces via Gradient Flow Semigroups*, Canad. Math. Bull., **59** no. 4 (2016), 673-681.
- [3] M. Borovikova and Ibragimov, *The Third Product of  $\mathbb{R}$* , Comput. Methods Funct. Theory, **9** (2009), no. 1, 255-268.
- [4] M. Borovikova, Z. Ibragimov and H. Yousefi, *Symmetric products of the Real Line*. J. Analysis., **18**, (2010), 53-67.
- [5] K. Borsuk and S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **37** (1931), 875-882.
- [6] K. Borsuk, *On the third symmetric potency of the circumference*, Fund. Math **36** (1949), 235-244.
- [7] R. Bott, *On the third symmetric potency of  $S_1$* , Fund. Math., **39** (1952), 264-268.
- [8] L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz des  $n$ -dimensionalen Gebiets*, Mathematische Annalen, **71** (1912), 305-313.
- [9] E. Castañeda, *Embedding symmetric products in euclidean spaces*, Continuum Theory, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **230.**, Marcel Dekker, New York, 2002, 67-79.
- [10] N. Chinen, *Symmetric products of the Euclidean spaces and the spheres*, Comment. Math. Univ. Carolin. **56**, 2 (2015), 209-221.
- [11] L. V. Kovalev, *Lipschitz retraction of finite subsets of Hadarmard spaces*, arXiv preprint arXiv:1406.6742, 2014
- [12] L. V. Kovalev, *Symmetric products of the line: Embeddings and retractions*, Proc. Amer. Math. Soc., **143** (2015), 801-809.
- [13] L. V. Kovalev, *Lipschitz retraction of finite subsets of Hilbert spaces*, Bull. Aust. Math. Soc., **93** (2016), 146-151.

- [14] F. Y. López Cayetano, *Retracciones Lipschitz en Productos Simetricos de la Recta Real*, Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2018.
- [15] R.Molski, *On symmetric products*, Fund. Math., **44** (1957),165-170.

# Anexos

**BKMS [B20-0231] Confirmation of manuscript submission.**

Bulletin of the Korean Mathematical Society <paper@kms.or.kr>

Jun 12/03/2020 09:00 PM

**Para:** Enrique Castañeda Alvarado <eca@uaemex.mx>

Dear Professor Enrique Castañeda-Alvarado,

**Manuscript ID**      **B20-0231**

**Manuscript Title**    Lipschitz Retractions on symmetric products of trees

**Author(s)**            **Enrique Castañeda-Alvarado** (Universidad Autónoma del Estado de México),  
**Fernando Orozco-Zitli** (Universidad Autónoma del Estado de México), and  
**Mónica A. Reyes-Quiroz** (Universidad Autónoma del Estado de México)

This is an automated message to confirm that the above manuscript has been successfully submitted via the *Bulletin of the Korean Mathematical Society* online submission system.

**URL:** <http://bkms.kms.or.kr/submission>

Sincerely,

Bulletin of the Korean Mathematical Society

# Lipschitz retractions on symmetric products of trees

Enrique Castañeda-Alvarado, Fernando Orozco-Zitli,  
and Mónica A. Reyes-Quiroz

## Abstract

Given a continuum  $X$  and a positive integer  $n$ ,  $F_n(X)$  denotes the hyperspace of non-empty subsets of  $X$  with at most  $n$  elements, endowed with the Hausdorff metric. In this article, given  $X$  a simple  $m$ -od, we prove that  $F_{n-1}(X)$  is a  $(6n+1)$ -Lipschitz retract of  $F_n(X)$  for every  $n \geq 2$ , and that  $F_{n-1}(X)$  is a 4-Lipschitz retract of  $F_n(X)$  for  $X$  a tree and  $n = 2, 3$ .

*2010 Mathematics Subject Classification.* 54B20, 54C15, 54E40.

*Keywords and phrases:* symmetric products, retractions, Lipschitz maps, trees and  $m$ -ods.

## 1 Introduction

A *continuum* is a non degenerated compact connected metric space. Given  $n \in \mathbb{N}$ , the  $n$ -fold symmetric product of a continuum  $X$ ,  $F_n(X)$ , is defined as the space of non-empty subsets of cardinality at most  $n$ , endowed with the Hausdorff metric. The symmetric products were introduced by K. Borsuk and S. Ulam in [2].

A map  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  is called Lipschitz if there is a real number  $L > 0$ , such that  $d_Y(f(a), f(b)) \leq Ld_X(a, b)$ . A subset  $Y$  of a continuum  $X$  is a Lipschitz retract of  $X$  if there exists a Lipschitz map  $r : X \rightarrow Y$  that fixes  $Y$  pointwise. Notice that  $F_1(X) \subset F_2(X) \subset F_3(X) \subset \dots$ . L. V. Kovalev proposed the following interesting problem in [5, Problem 4.1, p. 806]:

**Problem 1** *Characterize the metric spaces  $X$  such that  $F_k(X)$  is a Lipschitz retract of  $F_n(X)$  whenever  $k < n$ .*

In general there are no retractions  $r : F_n(X) \rightarrow F_k(X)$  (with  $1 \leq k < n$ ), for example if  $X$  is the circle  $\mathbb{S}^1$  it is known that  $F_2(X)$  is homeomorphic to the Möbius band, see [2, p. 887], where  $F_1(\mathbb{S}^1)$  could be identified with its border, also R. Bott in [3] proved that  $F_3(X)$  is homeomorphic to the 3-sphere,  $\mathbb{S}^3$ . However,  $F_1(\mathbb{S}^1)$  is embedded in the form of a trefoil knot in  $F_3(\mathbb{S}^1)$  as shown by J. Mostovoy in [8]. In a positive way, L. V. Kovalev in [5, Lemma 4.2, p. 806] showed that for any connected and non-empty subset  $X$  of the real line, there exists  $r : F_n(X) \rightarrow F_k(X)$  a Lipschitz retraction. In [1] and [4], Lipschitz retractions are studied in symmetric products of Hadamard spaces and [6] on Hilbert spaces of finite and infinite dimensions.

In Section 3 of this article we prove that for every  $n \geq 2$ ,  $F_{n-1}(X)$  is a  $(6n+1)$ -Lipschitz retract of  $F_n(X)$  for  $X$  a simple  $m$ -od, and in Section 4 we prove that if  $X$  is a tree then  $F_{n-1}(X)$  is a 4-Lipschitz retract of  $F_n(X)$  for  $n = 2, 3$ . At the end of this paper, some questions are proposed that remain open.

## 2 Preliminaries

Given a continuum  $X$  with metric  $d$ ,  $a \in X$ ,  $A \subset X$  and  $\varepsilon > 0$ .  $B_d(a, \varepsilon)$  denotes the open ball of radius  $\varepsilon$  with center in  $a$  and we define

$$B_d(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon),$$

$$\text{dist}(a, A) = \min \{d(a, b) : b \in A\}.$$

Let  $n \in \mathbb{N}$ . We consider

$$F_n(X) = \{A \subset X : 1 \leq |A| \leq n\}$$

with the Hausdorff metric given by

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset B_d(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset B_d(A, \varepsilon) \} \\ &= \max \{ \max_{a \in A} \text{dist}(a, B), \max_{b \in B} \text{dist}(b, A) \} \end{aligned}$$

for any  $A, B \in F_n(X)$ .

A *finite graph* is a continuum that can be written as the union of a finite number of arcs, which we will call edges, say  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , such that  $e_i$  intersects  $e_j$  only on one or both end points, to  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  with  $i \neq j$ .

A *tree* is a finite graph without subspaces homeomorphic to the circle  $\mathbb{S}^1$ . Given  $m \in \mathbb{N}$ , a *simple  $m$ -od* is a tree with  $m$  edges  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , such that  $e_i \cap e_j = v$  for any  $i \neq j$  and  $v$  a fixed point.

Let  $A \in F_n(X)$ . If  $|A| = n$ , we define  $\delta(A) = \min \{ d(a, b) : a, b \in A, a \neq b \}$  otherwise  $\delta(A) = 0$ .

The following lemma is easy to verify.

**Lemma 2** *Let  $(X, d)$  be a metric space and  $A, B \in F_n(X)$ . If  $a \in A$  then there is  $b \in B$  such that  $d(a, b) \leq H(A, B)$ . Moreover,  $\text{dist}(a, B) \leq H(A, B)$ .*

Note that the previous lemma is valid if  $A$  and  $B$  are elements of the hyperspace of closed subsets of  $X$ . The next lemma shows that the function  $\delta : F_n(X) \rightarrow [0, \infty)$  is Lipschitz.

**Lemma 3** *Let  $(X, d)$  be a metric space. If  $A, B \in F_n(X)$ , then  $|\delta(A) - \delta(B)| \leq 2H(A, B)$*

**Proof.** To prove this lemma we consider two cases:

**Case I.** If  $\delta(A) = \delta(B)$ , then  $|\delta(A) - \delta(B)| = 0 \leq 2H(A, B)$ .

**Case II.** If  $\delta(A) \neq \delta(B)$ . Suppose that  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  and  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Without loss of generality we can assume that  $\delta(A) > \delta(B)$ . Let  $b_1$  and  $b_2$  such that  $\delta(B) = d(b_1, b_2)$ , in case  $\delta(B) = 0$ , we consider  $b_1 = b_2$ .

By Lemma 2 we have that there exists  $a_1, a_2 \in A$  such that

$$d(b_1, a_1) \leq H(A, B) \text{ and } d(b_2, a_2) \leq H(A, B). \quad (1)$$

For the other hand

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, b_1) + d(b_1, b_2) + d(b_2, a_2). \quad (2)$$

So, by (1) and (2) we obtain,

$$d(a_1, a_2) - d(b_1, b_2) \leq 2H(A, B). \quad (3)$$

Similarly,

$$d(b_1, b_2) - d(a_1, a_2) \leq 2H(A, B). \quad (4)$$

Therefore by (3) and (4),

$$|\delta(A) - \delta(B)| \leq |d(b_1, b_2) - d(a_1, a_2)| \leq 2H(A, B).$$

The lemma is demonstrated. ■

### 3 Simple $m$ -ods

In this section we prove that for any simple  $m$ -od it is satisfied that its  $k$ -th symmetric product is a Lipschitz retract of its  $n$ -th symmetric product for  $1 \leq k < n$ .

Let  $m \in \mathbb{N}$ , in this section we consider a simple  $m$ -od,  $X$ , defined in the following way

$$X = \bigcup_{i=1}^m T_i$$

where  $T_1 = \{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_1 \leq 1\}$  and  $T_k = \{(0, \dots, x_k, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m : -1 \leq x_k < 0\}$

for  $k = 2, \dots, m$ . We consider  $X$  with the given metric by  $d(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|$  for any  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in X$ .

For each  $i = 1, \dots, m$ ,  $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  denotes the  $i$ -th projection given by  $\pi_i((x_1, \dots, x_m)) = x_i$ . Given  $a, b \in T_i$  we say that  $a \leq b$  if and only if  $\pi_i(a) \leq \pi_i(b)$ . Given  $A \in F_n(X)$ , for each  $i = 1, \dots, m$ ; suppose that  $A \cap T_i = \{t_1^i, \dots, t_{r_i}^i\}$  with  $t_{j-1}^i < t_j^i$  for  $j = 2, \dots, r_i$ .

For each  $a \in A$  we define  $a'$  in the following way:

- If  $a \in T_1$ , then  $a = t_j^1$  for some  $j \in \{1, \dots, r_1\}$ ; thus

$$a' = (t_j^1)' = \left( \max \left\{ 0, \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right\}, 0, \dots, 0 \right).$$

- If  $a \in T_i$  for  $i \neq 1$  then  $a = t_j^i$  for some  $j \in \{1, \dots, r_i\}$ , thus

$$a' = (t_j^i)' = (0, \dots, \min \{0, \pi_i(t_j^i) + (n - j)\delta(A)\}, \dots, 0).$$

**Proposition 4** *If  $a \in T_1$  then  $a' \in T_1$  and  $a' \leq a$ .*

**Proof.** Since  $a \in T_1$  then  $a = t_j^1$  for some  $j \in \{1, \dots, r_1\}$ .

For the first part, notice that

$$0 \leq \pi_1(a') = \max \left\{ 0, \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right\} \leq \pi_1(t_j^1) = \pi_1(a) \leq 1,$$

so  $a' \in T_1$ .

For the second part, since  $0 \leq \pi_1(a)$  and

$$\pi_1(a) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \leq \pi_1(a),$$

then  $\max \left\{ 0, \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right\} \leq \pi_1(a)$ . Therefore  $a' \leq a$ . ■

**Proposition 5** *If  $a \in T_i$  for some  $i \in \{2, \dots, m\}$  then  $a' \in T_i \cup \{\bar{0}\}$  and  $a \leq a'$ .*

**Proof.** As  $a \in T_i$  then  $a = t_j^i$  for some  $j = 1, \dots, r_i$ . Thus  $-1 \leq \pi_i(t_j^i) < 0$  and since  $(n - j)\delta(A) \geq 0$ , we have that  $\pi_i(t_j^i) \leq \pi_i(t_j^i) + (n - j)\delta(A)$  and since  $\pi_i(t_j^i) < 0$  we obtain

$$-1 \leq \pi_i(t_j^i) \leq \pi_i((t_j^i)') = \min \{0, \pi_i(t_j^i) + (n - j)\delta(A)\} \leq 0$$

that is to say,  $(0, \dots, -1, \dots, 0) \leq a \leq a' \leq \bar{0}$ . Therefore  $a \leq a'$  and  $a' \in T_i \cup \{\bar{0}\}$ . ■

**Proposition 6** *If  $t_{j-1}^i, t_j^i \in T_i$  for some  $i \in \{1, \dots, m\}$  and for some  $j \in \{2, \dots, r_i\}$ , then  $(t_{j-1}^i)' \leq (t_j^i)'$ .*

**Proof.** We consider two cases:

- Case I. Suppose that  $i = 1$ . By definition of  $\delta(A)$  we obtain

$$\pi_1(t_{j-1}^1) + \delta(A) \leq \pi_1(t_j^1)$$

thus,

$$\begin{aligned} \pi_1(t_{j-1}^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + (j-1) \right) \delta(A) &= \pi_1(t_{j-1}^1) + \delta(A) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \\ &\leq \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A). \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned} \pi_1((t_{j-1}^1)') &= \max \left\{ 0, \pi_1(t_{j-1}^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + (j-1) \right) \delta(A) \right\} \\ &\leq \max \left\{ 0, \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right\} = \pi_1((t_j^1)'). \end{aligned}$$

Therefore  $(t_{j-1}^1)' \leq (t_j^1)'$ .

- Case II. Suppose that  $i \in \{2, \dots, m\}$ . By definition of  $\delta(A)$  we have that

$$\pi_1(t_{j-1}^i) + \delta(A) \leq \pi_1(t_j^i),$$

then

$$\begin{aligned} \pi_1(t_{j-1}^i) + (n-j+1)\delta(A) &= \pi_1(t_{j-1}^i) + \delta(A) + (n-j)\delta(A) \\ &\leq \pi_1(t_j^i) + (n-j)\delta(A). \end{aligned}$$

Therefore  $(t_{j-1}^i)' \leq (t_j^i)'$ . ■

**Proposition 7** *If  $c, d \in A$  are such that  $\delta(A) = d(c, d)$ , then  $c' = d'$ .*

**Proof.** We consider the following three cases:

**Case I.** If  $c, d \in T_1$  then  $c = t_{j-1}^1$  and  $d = t_j^1$  for some  $j \in \{2, \dots, r_1\}$ . Since  $\delta(A) = d(c, d)$ , we have that  $\pi_1(t_{j-1}^1) + \delta(A) = \pi_1(t_j^1)$ , thus

$$\pi_1(t_{j-1}^1) + \delta(A) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) = \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A)$$

as  $\delta(A) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) = - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + (j-1) \right) \delta(A)$ , we obtain

$$\pi_1(t_{j-1}^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + (j-1) \right) \delta(A) = \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A).$$

Thus

$$\begin{aligned} \pi_1((t_{j-1}^1)') &= \max \left\{ 0, \pi_1(t_{j-1}^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + (j-1) \right) \delta(A) \right\} \\ &= \max \left\{ 0, \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) \right\} = \pi_1((t_j^1)'). \end{aligned}$$

Therefore  $c' = (t_{j-1}^1)' = (t_j^1)' = d'$ .

**Case II.** If  $c, d \in T_i$  for some  $i \in \{2, \dots, m\}$ , then  $c = t_{j-1}^i$  and  $d = t_j^i$  for some  $j \in \{2, \dots, r_i\}$ . Since  $\delta(A) = d(c, d)$ , we have that  $\pi_i(t_{j-1}^i) + \delta(A) = \pi_i(t_j^i)$ , then

$$\pi_i(t_{j-1}^i) + \delta(A) + (n-j)\delta(A) = \pi_i(t_j^i) + (n-j)\delta(A).$$

As  $\delta(A) + (n-j)\delta(A) = (n-j+1)\delta(A)$  we obtain

$$\pi_i(t_{j-1}^i) + (n-(j-1))\delta(A) = \pi_i(t_j^i) + (n-j)\delta(A).$$

Thus

$$\begin{aligned} \pi_i((t_{j-1}^i)') &= \max \{ 0, \pi_i(t_{j-1}^i) - (n-(j-1))\delta(A) \} \\ &= \max \{ 0, \pi_i(t_j^i) - (n-j)\delta(A) \} = \pi_i((t_j^i)'). \end{aligned}$$

And in this case it is also concluded that  $c' = (t_{j-1}^i)' = (t_j^i)' = d'$ .

**Case III.**  $c \in T_u, d \in T_v$  with  $u \neq v$  and  $u, v \in \{1, \dots, m\}$ .

We consider the following two subcases:

**Subcaso I.**  $c \in T_1$  or  $d \in T_1$ . Without loss of generality suppose that  $c \in T_1$ , then  $c = t_j^1$  for some  $j \in \{1, \dots, r_1\}$ .

Notice that

$$\delta(A) = d(c, d) = d(\pi_1(c), 0) + d(0, \pi_1(d)), \tag{5}$$

thus  $\pi_1(c) - \delta(A) \leq \pi_1(c) - d(\pi_1(c), 0) = 0$ .

As  $\pi_1(c) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) \leq \pi_1(c) - \delta(A)$ ,

then  $\pi_1(c) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) \leq 0$ . Hence

$$\max \left\{ 0, \pi_1(c) - \left( \sum_{l=2}^m r_l^1 + j \right) \delta(A) \right\} = 0.$$

Thus  $c' = \bar{0}$ .

**Subcase II.**  $c \in T_i$  or  $d \in T_i$  for some  $i \in \{2, \dots, m\}$ . Without loss of generality suppose that  $c \in T_i$ , thus  $c = t_j^i$  for some  $j = 1, \dots, r_i$ .

By 5 we have that

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_i(d) + d(\pi_i(d), 0) \\ &\leq \pi_i(d) + d(\pi_i(d), 0) + d(0, \pi_i(c)) \\ &= \pi_i(d) + \delta(A) \leq \pi_i(d) + (n-j)\delta(A). \end{aligned}$$

Thus,

$$\min \{0, \pi_i(c) + (n-j)\delta(A)\} = 0$$

that is,  $d' = \bar{0}$ .

Therefore  $c' = d'$ . ■

**Lemma 8** *If  $A = \{a_1, \dots, a_m\} \in F_n(X)$  then*

$$\max \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\} \leq n\delta(A).$$

**Proof.** To prove this lemma we require the following cases:

**Case I.** If  $|A| < n$ . By definition we have that  $\delta(A) = 0$  and  $a_k = a'_k$  for each  $k \in \{1, \dots, m\}$ . So

$$\max \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\} = 0 \leq n\delta(A).$$

**Case II.** If  $|A| = n$ . We consider the following two subcases:

- If  $a_k \in T_1$  then  $a_k = t_j^1$  for some  $j \in \{1, \dots, r_1\}$ , by Proposition 4 we have that  $a'_k \leq a_k$ , and

$$\text{since } \sum_{l=2}^m r_l + j \leq n$$

$$\begin{aligned} d(a_k, a'_k) &\leq \left| \pi_1(t_j^1) - \left( \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right) \right| \\ &= \left| \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \right| \\ &= \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A) \\ &\leq n\delta(A). \end{aligned}$$

- If  $a_k \in T_i$ , for some  $i \in \{2, \dots, m\}$ , then  $a_k = t_j^i$  for some  $j \in \{1, \dots, r_j\}$ . Hence,

$$\begin{aligned} d(a_k, a'_k) &\leq |\pi_i(t_j^i) - (\pi_i(t_j^i) + (n-j)\delta(A))| \\ &= (n-j)\delta(A) \\ &< n\delta(A). \end{aligned}$$

Thus the lemma is demonstrated. ■

Now, for  $n \geq 2$  we define the map  $r : F_n(X) \rightarrow F_{n-1}(X)$  given by:

$$r(A) = \begin{cases} \{a'_1, \dots, a'_n\} & \text{si } |A| = n, \\ A & \text{si } |A| < n. \end{cases} \quad (6)$$

By the propositions 4, 5, 6 and 7 we have that  $r$  is well defined. Next we will show an important property of the map  $r$  that will be very useful in order to prove the main theorem of this section.

**Lemma 9** *If  $A = \{a_1, \dots, a_m\} \in F_n(X)$  then*

$$H(A, r(A)) \leq \max \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\}.$$

**Proof.** For the proof of this lemma we consider two cases:  
**Case I.** If  $|A| < n$ , by definition we have that  $r(A) = A$ , so

$$H(A, r(A)) = 0 \leq \max \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\}.$$

**Case II.** If  $|A| = n$ .  
Since

$$H(A, r(A)) = \max \left\{ \max_{a \in A} \text{dist}(a, r(A)), \max_{a' \in r(A)} \text{dist}(a', A) \right\},$$

it is enough to demonstrate the following two things:

- i)  $\max_{a \in A} \text{dist}(a, r(A)) \leq \max \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\}$ , and
  - ii)  $\max_{a' \in r(A)} \text{dist}(a', A) \leq \max \{d(a_k, a'_k) : k \in \{1, \dots, m\}\}$ .
- To show i), given  $a_j \in A$  with  $j \in \{1, \dots, n\}$ , we have that

$$\begin{aligned} \text{dist}(a_j, r(A)) &= \min \{d(a_j, a'_i) | a'_i \in r(A)\} \\ &\leq d(a_j, a'_j) \\ &\leq \\ &\max \{d(a_k, a'_k) | k = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Similarly to prove ii), let  $a'_j \in r(A)$  with  $j \in \{1, \dots, n\}$ , then we have that

$$\begin{aligned} \text{dist}(a'_j, A) &= \min \{d(a'_j, a) | a \in A\} \\ &\leq d(a_j, a'_j) \\ &\leq \\ &\max \{d(a_k, a'_k) | k = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Therefore, if  $|A| = n$  we obtain

$$H(A, r(A)) \leq \max \{d(a_k, a'_k) | k = 1, \dots, n\}. \blacksquare$$

**Theorem 10** *Let  $n \geq 2$ . If  $X$  is a simple  $m$ -od then  $F_{n-1}(X)$  is a Lipschitz retract of  $F_n(X)$ .*

**Proof.** It suffices to prove that the retraction  $r$  given in (6) is Lipschitz, for which we consider two cases:

**Case I.**  $A = B$ .

Clearly in this case the Lipschitz inequality is satisfied since

$$H(r(A), r(B)) = 0 = H(A, B).$$

**Case II.**  $A \neq B$ .

In this case, consider the following two subcases:

**Subcase I.**  $\delta(A) \leq 2H(A, B)$ .

By Lemma 3 we have that

$$\begin{aligned} \delta(B) &\leq |\delta(B) - \delta(A)| + \delta(A) \leq 2H(A, B) + \delta(A) \\ &\leq 2H(A, B) + 2H(A, B) = 4H(A, B). \end{aligned}$$

Thus, also applying lemmas 8 and 9 we obtain

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &\leq H(r(A), A) + H(A, B) + H(B, r(B)) \\ &\leq n\delta(A) + H(A, B) + n\delta(B) \\ &\leq 2nH(A, B) + H(A, B) + 4nH(A, B) \\ &= (6n + 1)H(A, B). \end{aligned}$$

**Subcase II.**  $\delta(A) > 2H(A, B)$ .

Under these circumstances notice that  $\delta(B) > 0$ , otherwise by Lemma 3 we have that  $\delta(A) = |\delta(A) - \delta(B)| \leq 2H(A, B)$ , which is a contradiction.

From the above  $|A| = n = |B|$ . Thus, we suppose that  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  and let  $\varepsilon = H(A, B)$ .

**Claim a)**  $B \cap B_\varepsilon(a_k) \neq \emptyset$ , for each  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Indeed, by Lemma 2 we have that there exists  $b \in B$  such that  $d(a_k, b) \leq H(A, B)$  and thus  $b \in B \cap B_\varepsilon(a_k)$ .

**Claim b)** Given  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  with  $k \neq j$ ,  $B_\varepsilon(a_k) \cap B_\varepsilon(a_j) = \emptyset$ .

Indeed, if  $p \in B_\varepsilon(a_k) \cap B_\varepsilon(a_j)$ , then  $d(a_k, p) \leq H(A, B)$  and  $d(a_j, p) \leq H(A, B)$  and so we have that  $2H(A, B) < \delta(A) \leq d(a_k, a_j) \leq d(a_k, p) + d(p, a_j) \leq 2H(A, B)$ , which is not possible.

By claims a) and b) for each  $k \in \{1, \dots, n\}$ , there is a unique  $s(k)$  such that  $b_{s(k)} \in B_\varepsilon(a_k)$ . Also  $a_k$  and  $b_{s(k)}$  satisfy the following claim.

**Claim c)**  $d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq (2n+1)H(A, B)$ .

For the proof of this claim we consider the following four cases:

**Case i)**  $a_k \in T_i$  for some  $i \in \{2, \dots, m\}$  and  $b_{s(k)} \in T_1$ .

By propositions 4 and 5 we have that  $a_k \leq a'_k$  and  $b'_{s(k)} \leq b_{s(k)}$ , so  $d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq d(a_k, b_{s(k)})$  and since  $b_{s(k)} \in B_\varepsilon(a_k)$ , then

$$d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq d(a_k, b_{s(k)}) \leq H(A, B) < (2n+1)H(A, B).$$

**Case ii)**  $a_k, b_{s(k)} \in T_i$  for some  $i \in \{2, \dots, m\}$ .

In this case we have that  $a_k = t_j^i$  and  $b_{s(k)} = s_j^i$ . Let  $p = \pi_i(t_j^i) + (n-j)\delta(A)$  and  $q = \pi_i(s_j^i) + (n-j)\delta(B)$ .

Thus,  $\pi_i(a'_k) = \min\{0, p\} = \frac{p-|p|}{2}$  and  $\pi_i(b'_{s(k)}) = \min\{0, q\} = \frac{q-|q|}{2}$ . Then,

$$d(a'_k, b'_{s(k)}) = \left| \frac{(p-|p|) - (q-|q|)}{2} \right|,$$

so,

$$2d(a'_k, b'_{s(k)}) = \left| (p-q) + (|q|-|p|) \right| \leq |p-q| + ||q|-|p||.$$

Since  $||q|-|p|| \leq |p-q|$ , we have  $2d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq 2|p-q|$ . So, by Lemma 3 we have that

$$\begin{aligned} d(a'_k, b'_{s(k)}) &\leq |\pi_i(t_j^i) + (n-j)\delta(A) - (\pi_i(s_j^i) + (n-j)\delta(B))| \\ &\leq |\pi_i(t_j^i) - \pi_i(s_j^i)| + (n-j)|\delta(A) - \delta(B)| \\ &\leq H(A, B) + 2nH(A, B) \\ &= (2n+1)H(A, B). \end{aligned}$$

**Case iii)**  $a_k, b_{s(k)} \in T_1$ .

In this case we have that  $a_k = t_j^1$  and  $b_{s(k)} = s_j^1$ .

Let  $p = \pi_1(t_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(A)$  and  $q = \pi_1(s_j^1) - \left( \sum_{l=2}^m r_l + j \right) \delta(B)$ .

Hence,  $\pi_i(a'_k) = \max\{0, p\} = \frac{p+|p|}{2}$  and  $\pi_i(b'_{s(k)}) = \max\{0, q\} = \frac{q+|q|}{2}$ .

Continuing as in Case ii) we obtain  $d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq (2n+1)H(A, B)$ .

**Case iv)**  $a_k \in T_u$  and  $b_{s(k)} \in T_v$  with  $u, v \in \{2, \dots, m\}$  and  $u \neq v$ .

By Proposition 4 we have that  $a_k \leq a'_k$  and  $b_{s(k)} \leq b'_{s(k)}$ , thus

$$d(a'_k, b'_{s(k)}) \leq d(a_k, b_{s(k)}) \leq H(A, B) < (2n+1)H(A, B).$$

This concludes the proof of Claim c).

Now remember that

$$H(r(A), r(B)) = \max \left\{ \max_{a' \in r(A)} \text{dist}(a', r(B)), \max_{b' \in r(B)} \text{dist}(b', r(A)) \right\}.$$

Without loss of generality, suppose that

$$H(r(A), r(B)) = \max_{a' \in r(A)} \text{dist}(a', r(B)).$$

Then for some  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned}
H(r(A), r(B)) &= \text{dist}(a'_j, r(B)) \\
&\leq d(a'_j, b'_{s(j)}) \\
&\leq \max_k d(a'_k, b'_{s(k)}) \\
&\leq (2n+1)H(A, B) \\
&< (6n+1)H(A, B).
\end{aligned}$$

Therefore in any case we have that

$$H(r(A), r(B)) \leq (6n+1)H(A, B).$$

That is,  $r$  is  $(6n+1)$ -Lipschitz. ■

By [7, Proposición 2.1.3, p. 10] we have the following corollary

**Corollary 11** *Let  $n \geq 2$ . If  $X$  is a simple  $m$ -od, then for all  $1 \leq k < n$ ,  $F_k(X)$  is a  $L$ -Lipschitz retract of  $F_n(X)$ , where  $L = (6n+1)(6(n-1)+1) \cdots (6(k+1)+1)$ .*

## 4 Trees

Let  $X$  be a tree, let's assume that the metric  $d$  in  $X$  is the arc length metric. Also, suppose that each edge  $e_i$  of  $X$  has length one.

Given  $a, b \in X$ ,  $\overrightarrow{ab}$  denotes the arc that goes from  $a$  to  $b$ . Given  $0 \leq \lambda < d(a, b)$ , we define  $a_\lambda^b$  as the only point in the arc  $\overrightarrow{ab}$  such that  $d(a, a_\lambda^b) = \lambda$  and we define the midpoint of  $\{a, b\}$ , denoted by  $PM(\{a, b\})$ , as the only point in the arc  $\overrightarrow{ab}$  such that  $d(a, PM(\{a, b\})) = d(PM(\{a, b\}), b)$ .

**Remark 12** *Let  $a, b, c \in X$ . Then  $c \in \overrightarrow{ab}$  if and only if  $d(a, b) = d(a, c) + d(c, b)$ .*

**Proposition 13** *Let  $a, b, v \in X$  and  $0 \leq \lambda \leq d(b, v)$ . If  $b \in \overrightarrow{av}$  then  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) = d(a, b)$ .*

**Proof.** We consider two cases:

**Case I.**  $b \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ .

By Remark 12  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) = d(a_\lambda^v, b) + d(b, b_\lambda^v) = d(a, b) - \lambda + \lambda = d(a, b)$ .

**Case II.**  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{bb_\lambda^v}$ .

Since  $d(a, b_\lambda^v) = d(a, b) + \lambda$ , then  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) = d(a, b_\lambda^v) - d(a, a_\lambda^v) = d(a, b_\lambda^v) - \lambda = d(a, b)$ . ■

**Proposition 14** *Let  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq d(a, v)$  and  $0 \leq \kappa \leq d(b, v)$ . If  $b \in \overrightarrow{av}$ , then  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|$ .*

**Proof.** Notice that if  $\lambda = \kappa$ , then Proposition 13 give the equality. Now if  $\lambda \neq \kappa$ , let's consider the following two cases:

**Case I.**  $b \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ .

By Remark 12,  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) = d(a_\lambda^v, b) + d(b, b_\kappa^v) = d(a, b) - \lambda + \kappa \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|$ .

**Case II.**  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{bb_\kappa^v}$ .

i) If  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{b_\kappa^v v}$ , then  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) = d(a_\lambda^v, a) - d(a, b) - d(b, b_\kappa^v) = -d(a, b) + \lambda - \kappa \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|$ .

ii) If  $b_\kappa^v \in \overrightarrow{a_\lambda^v v}$ , then  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) = d(a, b_\kappa^v) - d(a, a_\lambda^v) = d(a, b) + d(b, b_\kappa^v) - d(a, a_\lambda^v) \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|$ . ■

**Proposition 15** *Let  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq d(a, v)$  and  $0 \leq \kappa \leq d(b, v)$ . If  $v \in \overrightarrow{ab}$ , then  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) \leq d(a, b)$ .*

**Proof.** By Remark 12  $d(a, b) = d(a, a_\lambda^v) + d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) + d(b_\kappa^v, b) = \lambda + d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) + \kappa$ . So  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) = d(a, b) - (\lambda + \kappa) \leq d(a, b)$ . ■

**Proposition 16** *Let  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq \min\{d(a, v), d(b, v)\}$ . If  $a \notin \overrightarrow{bv}$  and  $b \notin \overrightarrow{av}$ , then  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) \leq d(a, b)$ .*

**Proof.** Note that if  $\lambda = 0$  then the equality follows. Suppose that  $\lambda > 0$ , let  $z \in \overrightarrow{av} \cap \overrightarrow{bv}$  such that if  $w \in \overrightarrow{av} \cap \overrightarrow{bv}$  then  $\overrightarrow{aw} \subset \overrightarrow{bz}$ . We consider the following three cases:

**Case I.**  $a_\lambda^v \in \overrightarrow{bw}$  and  $b_\lambda^v \in \overrightarrow{aw}$ .

Without loss of generality, suppose that  $d(a, z) \leq d(b, z)$ . Let  $a' \in \overrightarrow{bw}$  such that  $a_\lambda^v = a'_\lambda$ . Note that  $d(a', b) < d(a, b)$ , thus by Proposition 13  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) = d(a', v) < d(a, b)$ .

**Case II.**  $a_\lambda^v \in \vec{bv}$  and  $b_\lambda^v \notin \vec{ab}$ .

The justification in this case is analogous to the one in Case I.

**Case III.**  $a_\lambda^v \notin \vec{bv}$  and  $b_\lambda^v \notin \vec{ab}$ .

In this case, note that  $a_\lambda^v = a_\lambda^z$  and  $b_\lambda^v = b_\lambda^z$ , so by Proposition 15,  $d(a_\lambda^v, b_\lambda^v) \leq d(a, b)$ . ■

The proof of the cases that are considered in the following proposition's demonstration is similar to those used to prove the previous proposition.

**Proposition 17** *Let  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq d(a, v)$  and  $0 \leq \kappa \leq d(b, v)$ . If  $a \notin \vec{bv}$  and  $b \notin \vec{ab}$ , then  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|$ .*

From the previous propositions we obtain the following corollary.

**Corollary 18** *If  $a, b, v \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq d(a, v)$  and  $0 \leq \kappa \leq d(b, v)$ , then  $d(a_\lambda^v, b_\kappa^v) \leq d(a, b) + |\lambda - \kappa|$ .*

**Theorem 19** *Let  $X$  be a tree. Then the map  $r : F_2(X) \rightarrow F_1(X)$ , given by  $r(A) = \{PM(A)\}$  is 4-Lipschitz.*

**Proof.** Let  $A, B \in F_2(X)$ . Note that  $H(A, r(A)) = \frac{\delta(A)}{2}$ . For the proof of this theorem we consider three cases:

**Case I.** If  $|A| = 1 = |B|$ . Then  $H(r(A), r(B)) = H(A, B)$ .

**Case II.** If  $|A| = 2$  and  $|B| = 1$ . Note that in this case  $\frac{\delta(A)}{2} \leq H(A, B)$ , thus  $H(r(A), r(B)) = H(r(A), B) \leq H(r(A), A) + H(A, B) \leq \frac{\delta(A)}{2} + H(A, B) \leq 2H(A, B)$ .

**Case III.** If  $|A| = 2 = |B|$ . We consider the following two subcases:

**Subcase a.**  $H(A, B) \geq \frac{\delta(A)}{2}$ .

In this case it is true that

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &\leq H(r(A), A) + H(A, B) + H(B, r(B)) \\ &= \frac{\delta(A)}{2} + H(A, B) + \frac{\delta(B)}{2}. \end{aligned}$$

Now we consider the following two situations:

i) If  $\delta(B) \leq \delta(A)$ , it is satisfied that

$$H(r(A), r(B)) \leq H(A, B) + \delta(A) \leq H(A, B) + 2H(A, B) = 3H(A, B)$$

ii) If  $\delta(B) > \delta(A)$ , then by Lemma 3 we get

$$\delta(B) \leq 2H(A, B) + \delta(A) \leq 4H(A, B),$$

and thus

$$H(r(A), r(B)) \leq \frac{\delta(A)}{2} + H(A, B) + \frac{\delta(B)}{2} \leq 4H(A, B).$$

**Subcase b.**  $H(A, B) < \frac{\delta(A)}{2}$ .

Let  $A = \{a, c\}$  and  $B = \{b, d\}$ , suppose that  $H(A, B) = d(a, b)$ , then by Corollary 18 and Lemma 3 we obtain

$$\begin{aligned} H(r(A), r(B)) &= d(PM(A), PM(B)) = d(a_{\frac{\delta(A)}{2}}^c, b_{\frac{\delta(B)}{2}}^d) \\ &\leq d(a, b) + \left| \frac{\delta(A)}{2} - \frac{\delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \end{aligned}$$

Therefore,  $r$  is a 4-Lipschitz retraction. ■

Now we will prove that  $F_2(X)$  is a Lipschitz retract of  $F_3(X)$ , for which we require the following results.

**Proposition 20** *Let  $a, b, d, e \in X$ . If  $d(a, d) < \frac{d(a, b)}{2}$  and  $d(b, e) < \frac{d(a, b)}{2}$  then  $PM(\{d, e\}) \in \vec{ab}$ .*

**Proof.** For the proof of this proposition we consider three cases:

**Case I.**  $d, e \in \vec{ab}$ .

If this happens then  $PM(\{d, e\}) \in \vec{de} \subset \vec{ab}$ .

**Case II.**  $d \in \vec{ab}$  but  $e \notin \vec{ab}$ , or  $e \in \vec{ab}$  but  $d \notin \vec{ab}$ .

Without loss of generality, suppose that  $d \in \vec{ab}$  but  $e \notin \vec{ab}$ . In this situation we consider the following two subcases:

**Subcase a.**  $\vec{ab} \subset \vec{ae}$ . Note that  $PM(\{d, b\}) \in \vec{ab}$  and since  $d(b, e) < d(b, d)$  then  $PM(\{d, e\}) = PM(\{d, b\})_{\frac{d(b, e)}{2}}^e \in \vec{ab}$ .

**Subcase b.**  $\vec{ab} \not\subset \vec{ae}$ . In this subcase we have that there exists  $t \in \vec{ab}$  such that  $d(b, e) = d(b, t) + d(t, e)$ . Since  $d(a, b) = d(a, d) + d(d, t) + d(t, b)$  and  $d(b, e) = d(b, t) + d(t, e)$ , then  $d(d, t) - d(t, e) = d(a, b) - d(a, d) - d(b, e) > 0$  and so  $d(d, t) > d(t, e)$ . Since  $d, t \in \vec{ab}$ , then  $PM(\{d, e\}) = PM(\{d, t\})_{\frac{d(t, e)}{2}}^e \in \vec{at} \subset \vec{ab}$ .

**Case III.**  $d, e \notin \vec{ab}$ . We consider the following two subcases:

**Subcase a.**  $\vec{ab} \subset \vec{de}$ . By Case II.  $PM(\{d, b\}) \in \vec{ab}$  and  $d(e, b) < d(a, b) \leq d(d, b)$ , then  $PM(\{d, e\}) = PM(\{d, b\})_{\frac{d(b, e)}{2}}^e \in \vec{ab}$ .

**Subcase b.**  $\vec{ab} \not\subset \vec{de}$ . Let  $s, t$  such that  $d(a, d) = d(a, s) + d(s, d)$  and  $d(b, e) = d(b, t) + d(t, e)$ .

i) If  $\vec{st} \subset \vec{ab}$ . Since  $\vec{st} \subset \vec{de}$ , applying the Subcase a.  $PM(\{d, e\}) \in \vec{st} \subset \vec{ab}$ .

ii) If  $\vec{st} \not\subset \vec{ab}$  and  $\vec{ab} \not\subset \vec{st}$ . In this situation we have that  $t \in \vec{ab}$  or  $s \in \vec{ab}$ , without loss of generality suppose that  $t \in \vec{ab}$ . Applying Case II. we have that  $PM(\{d, t\}) \in \vec{at}$  and since  $d(t, e) < d(t, d)$  then  $PM(\{d, e\}) = PM(\{d, t\})_{\frac{d(t, e)}{2}}^e \in \vec{at} \subset \vec{ab}$ . ■

**Proposition 21** Let  $x, y, z \in X$  be three different points. Then  $|\vec{xy} \cap \vec{yz} \cap \vec{zy}| = 1$ .

**Proof.** Since  $X$  does not have simple closed curves we have that the two following things are satisfied:

1.  $\vec{xy} \cap \vec{zx} = \{x\}$  or an arc contained in  $\vec{xy}$ , and
2.  $\vec{xy} \cap \vec{zy} = \{y\}$  or an arc contained in  $\vec{xy}$ .

Notice that  $\vec{xy} \cap \vec{zx} = \{x\}$  and  $\vec{xy} \cap \vec{zy} = \{y\}$  cannot happen otherwise we would have a simple closed curve.

- If  $\vec{xy} \cap \vec{zx} = \{x\}$  and  $\vec{xy} \cap \vec{zy}$  is an arc contained in  $\vec{xy}$  then  $\vec{xy} \cap \vec{yz} \cap \vec{xy} = \{x\}$ .
- If  $\vec{xy} \cap \vec{zx}$  is an arc contained in  $\vec{xy}$  and  $\vec{xy} \cap \vec{zy} = \{y\}$  then  $\vec{xy} \cap \vec{yz} \cap \vec{xy} = \{y\}$ .
- If  $\vec{xy} \cap \vec{zx}$  is an arc contained in  $\vec{xy}$  let's say  $\vec{vx}$  and  $\vec{xy} \cap \vec{zy}$  is an arc contained in  $\vec{xy}$  let's say  $\vec{wy}$ , since  $X$  has no simple closed curves then  $v = w$  and thus  $\vec{xy} \cap \vec{yz} \cap \vec{xy} = \{v\}$ . ■

**Proposition 22** Let  $x, y, z \in X$  be three different points. If  $d(x, y) \leq d(x, z)$  and  $d(x, y) \leq d(y, z)$  then  $z_{\frac{d(x, y)}{2}}^{PM(\{x, y\})} \in \vec{zb}$ , where  $v$  is the point that guarantees the previous proposition.

**Proof.** Let  $z' = z_{\frac{d(x, y)}{2}}^{PM(\{x, y\})}$ . For the proof of this proposition, we consider the following two cases:

**Case I.**  $v = x$  or  $v = y$ .

Without loss of generality, suppose that  $v = x$ . Notice that  $z \notin \vec{xy}$  and since  $d(z, z') < d(z, x) < d(z, PM(\{x, y\}))$ , then  $z' \in \vec{zx}$ .

**Case II.** If  $v \neq x$  and  $v \neq y$ .

In this case we note that  $d(z, z') = \frac{d(x, y)}{2} \leq \max\{d(x, v), d(v, y)\} \leq d(v, z)$  and therefore  $z' \in \vec{zv}$ . ■

**Theorem 23** Let  $X$  be a tree and  $r : F_3(X) \rightarrow F_2(X)$  given by

$$r(A) = \begin{cases} \left\{ PM(\{a, b\}), c_{\frac{\delta(A)}{2}}^{PM(\{a, b\})} \right\} & \text{if } |A| = 3, \\ A & \text{if } |A| < 3, \end{cases} \quad (7)$$

where  $A = \{a, b, c\}$  and  $a, b$  are such that  $\delta(A) = d(a, b)$ . Then  $r$  is 4-Lipschitz.

**Proof.** Let  $A, B \in F_3(X)$ . Notice that  $H(A, r(A)) = \frac{\delta(A)}{2}$ . We consider the following three cases:

**Case I.** If  $|A| < 3$  and  $|B| < 3$ , then  $H(r(A), r(B)) = H(A, B)$ .

**Case II.** If  $|A| = 3$  and  $|B| < 3$ , notice that  $\frac{\delta(A)}{2} \leq H(A, B)$ , then

$$H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B),$$

its proof is identical to Case II. of Theorem 19.

**Caso III.** If  $|A| = 3 = |B|$ . We consider the following two subcases:

**Subcase a.** If  $H(A, B) \geq \frac{\delta(A)}{2}$  then  $H(r(A), r(B)) \leq 4H(A, B)$ , the proof is identical to Subcase a. of Case III. of Theorem 19.

**Subcase b.**  $H(A, B) < \frac{\delta(A)}{2}$ . Suppose that  $B = \{d, e, f\}$  such that  $d(a, d) < \frac{\delta(A)}{2}$ ,  $d(b, e) < \frac{\delta(A)}{2}$  and  $d(c, f) < \frac{\delta(A)}{2}$ . Notice that

$$H(A, B) = \max \{d(a, d), d(b, e), d(c, f)\}. \quad (8)$$

From here we have three situations,  $\delta(B) = d(d, e)$ ,  $\delta(B) = d(e, f)$  or  $\delta(B) = d(d, f)$ .

1. If  $\delta(B) = d(d, e)$ . Let  $c' = c_{\frac{\delta(A)}{2}}^{PM(\{a, b\})}$  and  $f' = f_{\frac{\delta(B)}{2}}^{PM(\{d, e\})}$ . Note that in this situation

$$H(r(A), r(B)) \leq \max \{d(PM(\{a, b\}), PM(\{d, e\})), d(c', f')\}. \quad (9)$$

On the other hand, by Proposition 20 we have that  $PM(\{d, e\}) \in \overrightarrow{ab}$  and thus

$d(PM(\{a, b\}), PM(\{d, e\})) = d\left(a_{\frac{\delta(A)}{2}}^b, d_{\frac{\delta(B)}{2}}^b\right)$ , then by (8), Corollary 18 and Lemma 3 we have that

$$d(PM(\{a, b\}), PM(\{d, e\})) \leq d(a, d) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (10)$$

Now we will prove that  $d(c', f') \leq 2H(A, B)$ , for this purpose we consider the following two situations:

- (a)  $\overrightarrow{ab} \subset \overrightarrow{ac}$  or  $\overrightarrow{ab} \subset \overrightarrow{bc}$ .

Without loss of generality suppose that the first happens, then by Corollary 18, (8) and Lemma 3 we have that

$$d(c', f') = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^a, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^a) \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (11)$$

- (b)  $\overrightarrow{ab} \not\subset \overrightarrow{ac}$  and  $\overrightarrow{ab} \not\subset \overrightarrow{bc}$ .

Let  $v = \overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{bc} \cap \overrightarrow{ac}$ . Since  $PM(\{a, b\}), PM(\{d, e\}) \in \overrightarrow{ab}$ , then we have the following two options:

- i.  $PM(\{a, b\}), PM(\{d, e\}) \in \overrightarrow{va}$  or  $PM(\{a, b\}), PM(\{d, e\}) \in \overrightarrow{vb}$ . Without loss of generality suppose that the first happens, then  $d(c', f') = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^a, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^a)$ , thus by Corollary 18, (8) and Lemma 3 we obtain

$$d(c', f') \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (12)$$

- ii.  $(PM(\{a, b\}) \in \overrightarrow{av}$  and  $PM(\{d, e\}) \in \overrightarrow{vb})$  or  $(PM(\{a, b\}) \in \overrightarrow{bv}$  and  $PM(\{d, e\}) \in \overrightarrow{av})$ . Without loss of generality suppose that the first happens. Note that in this situation  $v \in \overrightarrow{bc}$ . Thus, by Proposition 22 we have that  $c' \in \overrightarrow{cv}$  and  $f' \in \overrightarrow{fv}$ , which implies that  $d(c', f') = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^v, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^v)$ . By Corollary 18, (8) and Lemma 3 we have that

$$d(c', f') \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (13)$$

Therefore, (9), (10), (11), (12) and (13) imply in this situation that  $H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B)$ .

2. If  $\delta(B) = d(e, f)$ . Let  $d' = d_{\frac{\delta(B)}{2}}^{PM(\{e, f\})}$  and  $c'$  be as in the previous situation. Notice that in this situation

$$H(r(A), r(B)) \leq \max \{d(PM(\{a, b\}), d'), d(c', PM(\{e, f\}))\} \quad (14)$$

By Proposition 20 we have that  $PM(\{e, f\}) \in \overrightarrow{bc}$ . We consider the following two possibilities:

(a)  $\vec{ab} \subset \vec{ac}$  or  $\vec{ab} \subset \vec{bc}$ .

Without loss of generality, suppose that the first thing happens. Since  $PM(\{e, f\}) \in \vec{bc}$  we get

$$d(d', PM(\{a, b\})) = d(d_{\frac{\delta(B)}{2}}^c, a_{\frac{\delta(A)}{2}}^c).$$

Using Corollary 18, (8) and Lemma 3 we obtain

$$d(d', PM(\{a, b\})) \leq d(a, b) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (15)$$

On the other hand, since  $c' \in \vec{cb}$  and  $PM(\{e, f\}) \in \vec{bc}$ , then

$d(c', PM(\{e, f\})) = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^b, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^b)$  by Corollary 18, (8) and Lemma 3 we have

$$d(c', PM(\{e, f\})) \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (16)$$

(b)  $\vec{ab} \not\subset \vec{ac}$  and  $\vec{ab} \not\subset \vec{bc}$ .

Let  $v = \vec{ab} \cap \vec{bc} \cap \vec{ac}$ . By Proposition 22 we have that  $c' \in \vec{cb}$  and since  $PM(\{e, f\}) \in \vec{bc}$  then  $PM(\{e, f\}) \in \vec{cv}$  or  $PM(\{e, f\}) \in \vec{vb}$ . Hence, in any case  $d(c', PM(\{e, f\})) = d(c_{\frac{\delta(A)}{2}}^b, f_{\frac{\delta(B)}{2}}^b)$ , by Corollary 18, (8), and Lemma 3 we obtain

$$d(c', PM(\{e, f\})) \leq d(c, f) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (17)$$

On the other hand, since  $PM(\{a, b\}) \in \vec{ab}$ ,  $PM(\{e, f\}) \in \vec{cb}$ , then we have the following options:

- i.  $PM(\{a, b\}) \in \vec{va}$  and  $PM(\{e, f\}) \in \vec{vc}$ .
- ii.  $PM(\{a, b\}) \in \vec{va}$  and  $PM(\{e, f\}) \in \vec{vb}$ .
- iii.  $PM(\{a, b\}) \in \vec{vb}$  and  $PM(\{e, f\}) \in \vec{vc}$ .
- iv.  $PM(\{a, b\}) \in \vec{vb}$  and  $PM(\{e, f\}) \in \vec{vb}$ .

Notice that in the four options  $d(PM(\{a, b\}), d') = d(a_{\frac{\delta(A)}{2}}^b, d_{\frac{\delta(B)}{2}}^b)$ . Thus, using Corollary 18, (8) and Lemma 3 we have that

$$d(PM(\{a, b\}), d') \leq d(a, b) + \left| \frac{\delta(A) - \delta(B)}{2} \right| \leq 2H(A, B). \quad (18)$$

Therefore, (14), (15), (16), (17) and (18) imply in this situation that  $H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B)$ .

3. If  $\delta(B) = d(d, f)$ . Observe that in this situation only  $\vec{ab} \not\subset \vec{ac}$  and  $\vec{ab} \not\subset \vec{bc}$  are satisfied, where it is true that  $H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B)$ , which proof is analogous to that of possibility (b) from 2.

Therefore, from the Subcase b, we obtain that  $H(r(A), r(B)) \leq 2H(A, B)$ . Concluding, thus, the proof of theorem. ■

Note that theorems 19 and 23 improve the Lipschitz constant for the case of  $m$ -ods.

**Corollary 24** *If  $X$  is a tree, then  $F_1(X)$  is a 16-Lipschitz retract of  $F_3(X)$ .*

To finish this paper we have the following problems

**Problem 25** *Improve the Lipschitz constant of theorems 10, 19 and 23, as well as corollaries 11 and 24.*

**Problem 26** *Concerning Theorem 10, find a Lipschitz constant that does not depend on  $n$ .*

**Problem 27** *Are there Lipschitz retractions of  $F_n(X)$  on  $F_k(X)$ , for  $X$  a tree,  $n \geq 4$  and  $k \geq 1$ ?*

## References

- [1] M. Bacák and L. V. Kovalev, *Lipschitz Retractions in Hadamard Spaces via Gradient Flow Semigroups*, *Canad. Math. Bull.*, **59** no. 4 (2016), 673-681.
- [2] K. Borsuk and S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37** (1931), 875-882.
- [3] R. Bott, *On the third symmetric potency of  $S_1$* , *Fund. Math.*, **39** (1952), 264-268.
- [4] L. V. Kovalev, *Lipschitz retraction of finite subsets of Hadarmard spaces*, arXiv preprint arXiv:1406.6742, 2014
- [5] L. V. Kovalev, *Symmetric products of the line: Embeddings and retractions*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **143** (2015), 801-809.
- [6] L. V. Kovalev, *Lipschitz retraction of finite subsets of Hilbert spaces*, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **93** (2016), 146-151.
- [7] F. Y. López Cayetano, *Retracciones Lipschitz en Productos Simetricos de la Recta Real*, Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2018.
- [8] J. Mostovoy, *Lattices in  $C$  and finite subsets of a circle*, *Amer. Math. Monthly*, **111** (2004), pp. 357-360.

Email addresses:

Enrique Castañeda-Alvarado, eca@uaemex.mx

Fernando Orozco-Zitli, forozco@uaemex.mx

Mónica A. Reyes-Quiroz, mreyesq093@alumno.uaemex.mx

Addresses:

Enrique Castañeda-Alvarado, Fernando Orozco-Zitli, and Mónica A. Reyes-Quiroz,  
Universidad Autónoma del Estado de México, Facultad de Ciencias, Instituto Literario No. 100,  
Colonia Centro Toluca, Estado de México, México C.P. 50000.



Toluca, México; a 22 de febrero de 2021

**Carta de autorización para la incorporación de  
objetos digitales en el Repositorio Institucional de  
la Universidad Autónoma del Estado de México.**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO  
P R E S E N T E**

El/la/los que suscribe/n Mónica Andrea Reyes Quiroz, con fundamento en los artículos 13 fracción I, 18, 21 22, 27, 30 y demás aplicables de la Ley Federal del Derecho de Autor y su Reglamento vigentes, firmo/mamos la presente Licencia de Uso Gratuita, No Exclusiva y No remunerada para la incorporación al Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma del Estado de México de la obra literaria (artículo, capítulo de libro, libro, tesis de posgrado, entre otros.) que lleva por título "Sobre los Productos Simétricos de Espacios Euclidianos."

Asimismo, declaro/ramos bajo protesta de decir verdad ser el/la/los autor/a/res y/o legítimo/a/s titular/es de la obra literaria y sus derivados visuales; y que responderé/remos de la autoría/titularidad, originalidad y nivel de acceso de la obra de mérito y del ejercicio pacífico de los derechos que se licencian en este acto, manifestando que no existe ninguna otra persona física o moral a la que le pertenezcan; por lo cual libero/ramos en este acto de toda responsabilidad a la Universidad Autónoma del Estado de México, así como de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que considere vulnerados sus derechos o que se suponga con derecho sobre la obra mencionada, asumiendo todas las consecuencias legales y económicas a que hubiera lugar.







Por lo anterior, autorizo que la Oficina de Conocimiento Abierto perteneciente a esta Máxima Casa de Estudios, realice lo propio para el almacenamiento, preservación y difusión de la obra, con fines académicos y culturales en formato de acceso abierto y sin fines de lucro en los términos siguientes:

**1. De los Derechos de Autor.**

Reconozco la importancia de protección de mi obra y el movimiento de Acceso Abierto del cual forma parte la Universidad Autónoma del Estado de México, por lo tanto conozco y acepto que mi obra esté protegida

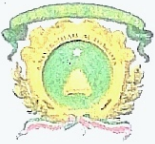


bajo una de las Licencia Creative Commons que a continuación se listan, marcando con una "X" del lado izquierdo la que será aplicable a mi obra:

	<i>Licencia</i>	<i>icono</i>
<input type="checkbox"/>	<b>Reconocimiento (BY):</b> El autor permite copiar, reproducir, distribuir, comunicar públicamente la obra, realizar obras derivadas (traducción, adaptación, etc.) y hacer de ella un uso comercial, siempre y cuando se cite y reconozca al autor original.	
<input type="checkbox"/>	<b>Reconocimiento - Sin obra derivada (BY-ND):</b> El autor permite copiar, reproducir, distribuir, comunicar públicamente la obra, y hacer de ella un uso comercial siempre y cuando se cite y reconozca al autor original. No permite generar obra derivada.	
<input type="checkbox"/>	<b>Reconocimiento - No comercial- Sin obra derivada (BY-NC-ND):</b> El autor permite copiar, reproducir, distribuir, comunicar públicamente la obra, siempre y cuando se cite y reconozca al autor original. No permite generar obra derivada ni utilizarla con finalidades comerciales.	
<input type="checkbox"/>	<b>Reconocimiento - No comercial (BY-NC):</b> El autor permite copiar, reproducir, distribuir, comunicar públicamente la obra, y generar obras derivadas siempre y cuando se cite y reconozca al autor original. No se permite utilizar la obra con fines comerciales.	
<input checked="" type="checkbox"/>	<b>Reconocimiento - No comercial - Compartir igual (BY-NC-SA):</b> El autor permite copiar, reproducir, distribuir, comunicar públicamente la obra, y generar obras derivadas siempre y cuando se cite y reconozca al autor original. La distribución de las obras derivadas deberá hacerse bajo una licencia del mismo tipo. No se permite utilizar la obra con fines comerciales.	
<input type="checkbox"/>	<b>Reconocimiento - Compartir igual (BY-SA):</b> El autor permite copiar, reproducir, distribuir, comunicar públicamente la obra, generar obras derivadas y hacer de ellas un uso comercial, siempre y cuando se cite y reconozca al autor original. Se permite la distribución de las obras derivadas, pero única y exclusivamente con una licencia del mismo tipo.	

## 2. De la Difusión del producto

El nivel de acceso en mi obra definirá la parcialidad o totalidad de acceso a los datos y documento a texto completo para su visibilidad en el Repositorio Institucional, por lo que la aplicable a mi obra, es el señalada del lado izquierdo en esta sección:

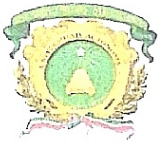


**Nivel de acceso**

- a. **Abierto:** esta característica permite que los metadatos del depósito puedan ser visualizados en su totalidad, así como el acceso al documento a texto completo depositado para visualización y descarga, el documento es incluido en resultados de búsquedas. Las características de un archivo para publicación en abierto son:
- I. Es posible acceder a su contenido de manera libre y universal, sin costo alguno para el lector, a través de cualquier dispositivo que cuente con acceso a Internet;
  - II. El autor o titular de los derechos de propiedad intelectual otorga al usuario el derecho de utilizar, copiar o reproducir el contenido, con la única condición de que se dé el debido crédito de autoría.
  - III. El documento ya cumplió su periodo de exclusividad con alguna editorial o tercera persona y está disponible para su libre publicación.
- b. **Restringido:** esta característica se utiliza cuando se desea que el documento no se muestre al público, únicamente podrán visualizarse los metadatos del depósito a petición del depositante o autor, en caso de que algún visitante o usuario desee el acceso al contenido completo del documento se enviará un mensaje al depositante del documento a texto completo solicitando su acceso, el depósito será incluido en los resultados de búsqueda
- c. **Embargado:** esta característica permite ocultar el documento por un periodo de tiempo definido por el autor, únicamente podrán visualizarse los metadatos del depósito a petición del depositante o autor, llegada la fecha de finalización de embargo el acceso al documento será modificado a "acceso abierto", mientras el documento se encuentre oculto los metadatos serán visibles y quedará incluido en los resultados de búsqueda.
- d. **Cerrado:** en este caso el depósito no será incluido en los resultados de búsquedas, el documento y los metadatos de depósito NO serán visibles para los usuarios.

Para el caso de nivel de acceso Restringido, Cerrado o Embargo, se deberá contar con un motivo y fecha de término por el nivel de acceso elegido.

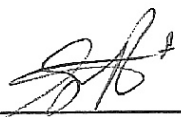
Así mismo, conozco y acepto los términos del aviso de privacidad de la UAEMex, mismo que puede ser consultado en [http://web.uaemex.mx/avisos/Aviso\\_Privacidad.pdf](http://web.uaemex.mx/avisos/Aviso_Privacidad.pdf); en este mismo acto otorgo mi consentimiento, para que la Universidad Autónoma del Estado de México, haga públicos mis datos personales referentes a nombres, espacio



académico, opiniones y/o conclusiones vertidas en el presente trabajo de investigación (tesis de grado y posgrado, artículos, libros, capítulos y cualquier trabajo académico) derivado de las obligaciones comunes y específicas que se tiene como Sujeto Obligado en materia de Transparencia y en cumplimiento a la Ley de Protección de Datos Personales en Posesión de Sujetos Obligados

En pos a la protección de datos personales de terceros, y en cumplimiento a la Ley de Protección de Datos Personales en Posesión de Sujetos Obligados, estoy de acuerdo para que la tesis de mi autoría no contenga documentos donde se visualicen datos personales sensibles que puedan afectar a terceros; tales documentos como voto aprobatorio, aceptación de tesis, dedicatorias, agradecimientos, mismos que, de no ocultarlos, serán visibles en el Repositorio Institucional de la Universidad autónoma Del Estado de México, haciéndome responsable de los mismos y sin previo permiso de los terceros

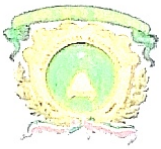
Firmo de Conformidad y bajo protesta de decir verdad

Nombre y Firma Mónica Andrea Reyes Quiroz 

No. De Cuenta 0913093

NOTA: Ésta carta, toda vez que el autor registre los campos de llenado y las firmas correspondientes, debe digitalizarse y adjuntarse en el depósito del Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma del Estado de México; misma que no será visible para consulta.

Conozco y acepto los términos de privacidad de la  
Universidad Autónoma del Estado de México  
[http://web.uaemex.mx/avisos/Aviso\\_Privacidad.pdf](http://web.uaemex.mx/avisos/Aviso_Privacidad.pdf)



Toluca, México a 22 de febrero de 2021

**Hoja de datos del autor**

Nombre: Mónica Andrea Reyes Quiroz

Número de cuenta (en caso de aplicar): 0913093

Grado académico: Maestría

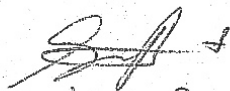
Programa educativo de procedencia (aplica solo en tesis): Maestría en Ciencias (Matemáticas)

Institución donde labora: Facultad de Ciencias

Domicilio: Carretera Toluca-Ixtlahuaca Km 15.5, El Cerrillo Piedras Blancas.

Teléfono/Fax: (722) 296-55-54

Correo electrónico (preferentemente correo institucional): fciencias@uaemex.mx

  
Mónica Andrea Reyes Quiroz  
Nombre y firma

Nota: para el caso de que sean más de un autor, se deberá imprimir esta última hoja de "datos del autor" en relación al número de autores.

Esta información es recabada con fines administrativos

Conozco y acepto los términos de privacidad de la  
Universidad Autónoma del Estado de México  
[http://web.uaemex.mx/avisos/Aviso\\_Privacidad.pdf](http://web.uaemex.mx/avisos/Aviso_Privacidad.pdf)